# Forme algébrique des complexes

**Exercice 1**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 4 cm.
Soit $A$ le point d'affixe $i$ et $F$ le milieu du segment $[OA]$.
On appelle $f$ l'application qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ ($z$ non réel), associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = \frac{2z - i}{z - \overline{z}}$$

1. Calculer les affixes des images par $f$ des points $A$ et $F$. Placer sur une figure ces points. Cette figure sera complétée au cours de l'exercice.
2. On pose $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels.
   (a) Écrire $z'$ sous forme algébrique.
   (b) En déduire l'ensemble $\mathcal{D}$ des points $M$ d'affixe $z$ pour lesquels $z'$ est imaginaire pur. Tracer $\mathcal{D}$.
   (c) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathcal{P}$ des points d'affixe $z$ tels que $|z'| = 1$ .
3. Pour tout point $M$ d'affixe $z$, on note $M''$ le symétrique de $M$ par rapport à l'axe $(O; \overrightarrow{u})$ et $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $(O; \overrightarrow{u})$.
   (a) Exprimer les affixes des points $M''$ et $H$ en fonction de $z$.
   (b) Donner des interprétations géométriques du module de $z'$ et d'un argument de $z'$.
   Ces interprétations feront intervenir les points $M$, $H$ et $F$.
   (c) Quel est l'ensemble des points $M$ du plan tels que $\dfrac{MF}{MH} = 1$ ?
   (d) Déterminer et représenter l'ensemble $\Delta$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que :

$$\begin{cases} \Im m(z) > 0 \\ \arg(z') = \dfrac{\pi}{4} \ [2\pi] \end{cases}$$

**Exercice 2**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soit $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives -4 ; 3 et $i$.
On appelle $f$ l'application du plan $\mathcal{P}$ privé de $A$ dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ ($z \neq -4$) associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = \frac{z - 3}{z + 4}$$

1. Placer les points $A$, $B$ et $C$ sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. (a) Déterminer l'affixe du point $C'$ image de $C$ par l'application $f$.
   (b) Démontrer que le point $C$ admet un unique antécédent par $f$, que l'on notera $C''$.
3. Déterminer les affixes des points invariants par $f$ (c'est-à-dire les points $M$ vérifiant $f(M) = M$).
4. (a) Donner une interprétation géométrique du module de $z'$.
   (b) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M$ dont les images par $f$ appartiennent au cercle de centre $O$ et de rayon 1.

5. (a) Montrer que pour tout complexe $z$ différent de $-4$,

$$\left|z' - 1\right| \,.\, |z+4| = 7$$

   (b) En déduire que si $M$ décrit un cercle $\Gamma$ de centre $A$ et de rayon $r$, alors son image $M'$ par $f$ appartient à un cercle $\Gamma'$ dont on précisera le centre et le rayon.

**Exercice 3**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$
d'unité graphique 4 cm.
$\theta$ désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle ouvert $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
On considère l'équation d'inconnue complexe $z$ :

$$(E) : \qquad z^2 - 2z + 1 + \tan^2\theta = 0$$

1. Résoudre dans $C$ cette équation $(E)$.
   On notera $z_1$ la solution dont la partie imaginaire est positive et $z_2$ l'autre solution.
2. Calculer $z_1 + z_2$ , $z_1\, z_2$ puis $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$ en fonction de $\theta$.
3. (a) Calculer $S = z_1^2 + z_2^2$.
   (b) Pour quelle valeur de $\theta$ a-t-on $S = 0$ ?
4. On note $A$ et $B$ les points du plan complexe d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.
   (a) Placer $A$ et $B$ sur une figure en faisant apparaître $\theta$ comme une mesure d'un angle orienté.
   (b) Quelle est la nature du triangle $OAB$ ?
   (c) Déterminer $\theta$ de manière à ce que $OAB$ soit un triangle équilatéral.
   (d) Exprimer en fonction de $\theta$ l'aire du triangle $OAB$.

**Exercice 3** (corrigé)

1. Posons $a = 1$ ; $b = -2$ et $c = 1 + \tan^2\theta$.
   Le discriminant de l'équation est
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1+\tan^2\theta) = -4\,\tan^2\theta = -(2\,\tan\theta)^2 = (2\,i\,\tan\theta)^2$$
   Comme $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\quad \Delta < 0$.
   L'équation $(E)$ admet donc deux solutions complexes conjuguées :
   $$z_1 = \frac{-(-2) + (2\,i\,\tan\theta)}{2} = 1 + i\tan\theta \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1} = 1 - i\,\tan\theta$$

2. On sait que $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = 2$ et $z_1\,z_2 = \dfrac{c}{a} = 1 + \tan^2\theta$
   De plus puis $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1\,z_2} = \dfrac{2}{1+\tan^2\theta} = 2\,\cos^2\theta$

3. (a) $S = z_1^2 + z_2^2 = (z_1+z_2)^2 - 2\,z_1\,z_2 = 2^2 - 2(1+\tan^2\theta) = 2(1-\tan^2\theta)$.
   (b) $S = 0 \Leftrightarrow 2(1-\tan^2\theta) = 0 \Leftrightarrow \tan^2\theta = 1$
   Comme on résout dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,
   $S = 0 \Leftrightarrow \tan\theta = 1 \Leftrightarrow \tan\theta = \tan\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi] \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

4. On note $A$ et $B$ les points du plan complexe d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.

   (a) $A$ et $B$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O\,;\overrightarrow{u})$. Le point $A$ a pour coordonnées cartésiennes $(1\,;\,\tan\theta)$. Donc l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{OA}\right)$ a pour mesure principale $\theta$. $\boxed{\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{OA}\right) = \theta \quad [2\pi]}$
   (b) Le triangle $OAB$ est indirect et isocèle en $O$ car $OA = OB$.
   (c) L'axe $(O\,;\overrightarrow{u})$ est axe de symétrie du triangle $OAB$ isocèle en $O$, c'est donc la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OB}\,,\,\overrightarrow{OA}\right)$ dont la mesure principale appartient à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   En conséquence $OAB$ est un triangle équilatéral ssi $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{6}$
   ssi $\boxed{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$
   (d) Notons $I$ le milieu de $[AB]$. Alors $z_I = 1$ et l'aire du triangle $OAB$ est :
   $$\mathcal{A}_{OAB} = \frac{AB \times OI}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{|\tan\theta - (-\tan\theta)|}{2} = |\tan\theta|$$
   Ainsi $\mathcal{A}_{OAB} = \tan\theta$