CONGRUENCES DANS Z – Exercices corrigés

Exercice 1 : *Trouver le reste de la division euclidienne de 19^{52} par 7.*
Cela revient à chercher la classe de congruence de 19^{52} modulo 7.
- Nous avons : $19 \equiv 5$ (7), ce qui implique $19^{52} \equiv 5^{52}$ (7).

- Cherchons le reste des puissances de 5 dans la division par 7 :
$5^1 \equiv 5$ (7) $5^2 \equiv 4$ (7) $5^3 \equiv 6$ (7) $5^4 \equiv 2$ (7) $5^5 \equiv 3$ (7) $5^6 \equiv 1$ (7).
Alors, pour tout entier n :
$5^{6n} \equiv 1^{6n} \equiv 1(7)$, $5^{6n+1} \equiv 5(7)$, $5^{6n+2} \equiv 4$ (7), $5^{6n+3} \equiv 6$ (7), $5^{6n+4} \equiv 2$ (7), $5^{6n+5} \equiv 3$ (7).

- La division de 52 par 6 donne 52 = 8 . 6 + 4 c'est-à-dire $52 \equiv 4$ (6).
Donc $19^{52} \equiv 5^{52} \equiv 5^4 \equiv 2$ (7). Le reste de la division de 19^{52} par 7 est 2.

Exercice 2 :
1. Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.
2. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre
$N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

1. p = 0 : 1, p = 1 : 5, p = 2 : −1 ou 12, p = 3 : −5 ou 8, p = 4 : 1 donc
pour p = 4k le reste est 1,
pour p = 4k +1 le reste est 5,
pour p = 4k +2 le reste est 12 ou −1,
pour p = 4k +3 le reste est 8 ou −5.

2. $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$: $31 = 2\times 13 + 5 \equiv 5\ (13)$ et $18 = 1\times 13 + 5 \equiv 5\ (13)$;
on a donc $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv \left[5^{4n+1} + 8^{4n-1}\right](13) \equiv [5+8](13) \equiv 0(13)$

Exercice 2 :

Résoudre dans Z l'équation $x^2 - 3x + 4 \equiv 0$ (7)

Le tableau ci-après donne le reste de la division par 7 de x, x^2 et 3x.

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
x^2	0	1	4	2	2	4	1
3x	0	3	6	2	5	1	4
$x^2 - 3x + 4$	4	2	2	4	1	0	1

La solution est x = 7k + 5.

Exercice 3 :
- Démontrer que pour tout $n \in$ IN, 10 divise $n^5 - n$.
Méthode : *- Ecrire la division euclidienne de a par b en tenant compte des différentes valeurs que peut prendre le reste.*
- Exprimer a en mettant en facteur b.

Exercice 4 : *Résoudre dans Z, $3x \equiv 1$ (5).*
Dressons la table des multiples de 3 dans Z / 5Z.

x	0	1	2	3	4
3x	0	3	1	4	2

L'équation $3x \equiv 1\ (5)$ équivaut à $x \equiv 2\ (5)$. D'où $x = 5k + 2,\ \ k \in Z$