Similitude plane : Fiche

LES SIMILITUDES DIRECTES

- **Comment reconnaître qu'une application f est une similitude directe ?**

- f est une bijection conservant le rapport des distances et les angles orientés.
- f est la composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre.
- f est la réciproque d'une similitude directe.
- f admet pour écriture complexe z' = az +b, a∈C*.
- f a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q \end{cases}$$

- f est la composée de 2 similitudes directes

- **Comment déterminer le rapport k d'une similitude directe f ?**

- si f(A)=A' et f(B)=B' et $A \neq B$, alors $k = \frac{A'B'}{AB}$
- si f a pour forme complexe $z \mapsto az+b$ alors k = |a|
- si f est la composée de 2 similitudes de rapports k_1 et k_2, alors $k = k_1 k_2$
- si f est la réciproque d'une similitude de rapport k', alors $k = \frac{1}{k'}$

- **Comment déterminer l'angle θ d'une similitude directe f ?**

- si f(A) = A' et f(B) = B' et $A \neq B$, alors $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$
- si f a pour forme complexe $z \mapsto az+b$, alors $\theta = \arg(a)$
- si f est la composée de deux similitudes directes d'angles θ_1 et θ_2 alors : $\theta = \theta_1 + \theta_2$
- si f est la réciproque d'une similitude directe d'angle θ' , alors : $\theta = -\theta'$

- **Comment déterminer le centre Ω d'une similitude directe f ?**

- si f(A) = A' et f(B) = B' et $A \neq B$, alors le centre Ω de f est le point, autre que I, intersection des droites (AB) et (A'B'), commun aux cercles (IAA') et (IBB').

- si f a pour forme complexe $z \mapsto az+b$, alors le centre Ω est le point d'affixe $\omega = \frac{b}{1 \ a}$

- **Comment caractériser une similitude directe f ?**

1- si elle a pour centre Ω et qu'elle transforme A en A' alors :

- son rapport $k = \frac{\Omega A'}{\Omega A}$
- son angle $\theta = (\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega A})$

2- si elle transforme un bipoint (A,B) en (A',B') alors :

- son rapport $k = \dfrac{A'B'}{AB}$
- son angle $\theta = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB})$
- son centre Ω est le point, autre que I, intersection des droites (AB) et (A'B'), commun aux cercles (IAA') et (IBB').

3- si elle admet une écriture complexe z' = az +b

Cas où a=1 : f est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b

Cas où a≠1 :

Si |a| =1 : f est une rotation d'angle θ = arg a

Si a $\in$IR* : f est une homothétie d'angle θ = arg a

Si |a| ≠1 , a$\notin$IR* : f est une similitude directe d'angle θ = arg a, de rapport k = | a | , de centre $\Omega(z_\Omega = \dfrac{b}{1-a})$

- **Comment déterminer la composée de 2 similitudes connaissant leurs écritures complexes ?**

- Si S_1 et S_2 ont respectivement pour écritures complexes : $z'=a_1z + b_1$ et $z'=a_2 z + b_2$, alors :

$$\begin{tikzcd} M(z) \arrow[r, "S_1"] \arrow[dr, "f=S_2 \circ S_1"'] & M_1(z_1) \arrow[d, "S_2"] \\ & M_2(z_2) \end{tikzcd}$$

$z_1 = a_1 z + b_1$

$z_2 = a_2 z_1 + b_2$

- Dans z_2 on remplace z_1 par son expression.
- Ecrire l'application ainsi obtenue sous la forme z'=az + b et la caractériser.

- **Comment construire l'image M' de M par une similitude directe f ?**

- si f est la similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, alors M' est le point tel que $\Omega M' = k\Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$.
- si f(A) = A' et f(B) = B' et $A \neq B$, tout triangle ABM a pour image le triangle A'B'M' directement semblable au triangle ABM