Similitudes planes et nombres complexes

1. Ecriture complexe d'une similitude directe

Théorème

Si f est une similitude directe, il existe des nombres complexes a et b ($a \neq 0$) tel que l'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$.

Soit le point Ω d'affixe ω et k un réel positif.

- L'homothétie h (Ω, k) transforme le point M (z) en M_1 (z_1) tel que :

$$z_1 - \omega = k (z - \omega)$$

- A la rotation r, on peut associer un réel θ et un nombre complexe z_0 tel que si r transforme M_1 en M' (z'), on ait :

$$z' = (\cos\theta + i \sin\theta) z + z_0 = e^{i\theta} z + z_0.$$

- La similitude directe f = r o h transforme M en M ' tel que

$$z' = e^{i\theta} [k z + (1-k) z_\Omega] + z_0$$
$$= k e^{i\theta} z + (1-k) e^{i\theta} z_\Omega + z_0$$

Soit $z' = az + b$ avec $a = k e^{i\theta} = k (\cos\theta + i \sin\theta)$ et $b = (1-k) e^{i\theta} z_\Omega + z_0$

- Etude des transformations d'écriture complexe : z' = az + b, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

Soit les complexes a et b ($a \neq 0$). On considère la transformation :

$$f : P \to P$$
$$M(z) \mapsto M'(z') , \quad z' = az + b$$

- Si a = 1, on a z' = z + b. f et la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.

- Si $a \neq 1$, Le point Ω (z_Ω) est invariant par f si $\omega = a\omega + b$ i.e. $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. Alors, $z' - z_\Omega = a (z - z_\Omega)$.

Or on peut écrire $a = |a| (\cos\theta + i \sin\theta) = |a| e^{i\theta}$,

d'où : $z' - z_\Omega = |a| (\cos\theta + i \sin\theta) (z - z_\Omega) = |a| (z - z_\Omega) e^{i\theta}$.

f est la composée de l'homothétie de centre Ω (z_Ω), de rapport $k = |a|$ et de la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Théorème

La transformation M (z) $\to$ M ' (z') tel que $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est une similitude directe d'angle $\theta = \arg a$ et de rapport $k = |a|$.

Si de plus, $a \neq 1$, cette transformation a un point invariant unique Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ qui est la centre de la similitude.

f = roh est appelée forme réduite de la similitude directe.

- Transformé d'un bipoint par une similitude directe

- On considère la similitude directe s définie par $z \to z' = az + b$.

Soient les points A (z_A) et B (z_B) du plan P et A' = s (A), B '= s(B). On a : $z_{B'} - z_{A'} = a (z_B - z_A)$.

Alors :

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right| = |a| \\ \arg\,(z_{B'} - z_{A'}) - \arg\,(z_B - z_A) = \arg a \end{cases}$$

i.e. $\dfrac{A'B'}{AB} = |a|$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \arg a$

- *Réciproque : similitude directe définie par la donnée de 2 points et leurs images.*

Soient A (z_A), B (z_B) et A' ($z_{A'}$), B' ($z_{B'}$) des points distincts de P. On démontre qu'il existe une unique similitude directe tel que l'image du bipoint (A,B) par cette similitude soit le bipoint (A',B').
En effet, il faut et il suffit qu'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} z_{A'} = a z_A + b \\ z_{B'} = a z_B + b \end{cases}$$

Puisque $z_A \neq z_B$, on a $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ et $b = \dfrac{z_B z_{A'} - z_A z_{B'}}{z_B - z_A}$. a et b sont uniques.

- Si a = 1, alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. C'est la translation de vecteur d'affixe b.

- Si a ≠ 1, alors la transformation est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, de rapport $k = |a| = \dfrac{A'B'}{AB}$ et d'angle $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \arg\,(z_{B'} - z_{A'}) - \arg\,(z_B - z_A)$.^

Théorème

Etant donnés A, B, A', B' avec (A≠B), il existe une unique similitude directe qui transforme A en A' et B en B'. C'est la similitude directe de rapport $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ et d'angle $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$

2. Expression complexe d'une similitude inverse

Théorème.

f est une similitude indirecte, f : M (z) → M ' (z '), si et seulement si sa fonction complexe associée est de la forme, $z' = a\bar{z} + b$, $a \neq 0$.

Démonstration.
f transforme le triangle ABC en A'B'C' semblable indirect.
La réflexion d'axe Ox, s_{Ox} : M (z) → M_1 ($\bar{z}$) transforme le triangle ABC en $A_1B_1C_1$ semblable indirect.
$A_1B_1C_1$ et A'B'C' sont semblables directs donc il existe une unique similitude directe g qui transforme $A_1B_1C_1$ et A'B'C', sa traduction complexe est de la forme $z' = a z + b$, $a \neq 0$.
f = g o r et sa traduction complexe est de la forme $z' = a\bar{z} + b$, $a \neq 0$.

Réciproque: Soit la transformation :

$$z \xrightarrow{s_{Ox}} z_1 = \bar{z} \quad \text{symétrie par rapport à Ox}$$

$$z_1 \xrightarrow{s_1} z' = a z_1 + b \text{ similitude directe}$$

La composée s_1 o s_{Ox} est une similitude plane inverse.

- Etude des transformations d'écriture complexe : $z' = a\overline{z} + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

La similitude inverse s : M (z) → M ' (z') tel que $z' = a\overline{z} + b$ est une similitude de rapport k = I a I.

1er cas : si I a I = 1, s est un antidéplacement.

- Recherche des points invariants

- On peut déterminer l'ensemble des points invariants à partir de l'expression analytique. Si cet ensemble est non vide, s est la symétrie orthogonale (ou réflexion) par rapport à cette droite invariante.

- Détermination à partir de $z' = a\overline{z} + b$.

Considérons l'application s o s. On a $M(z) \xrightarrow{s} M'(z') \xrightarrow{s} M''(z'')$

$$z' = a\overline{z} + b \qquad z'' = a\overline{z'} + b = a\overline{a}z + a\overline{b} + b$$

Or I a I = 1, d'où s o s est donc la translation t de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $a\overline{b} + b$.

- L'application s est une symétrie orthogonale si et seulement si s o s = id c'est-à-dire $a\overline{b} + b = 0$.

Si $a\overline{b} + b \neq 0$, s est la composée d'une réflexion s_D et d'une translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $\dfrac{a\overline{b} + b}{2}$.

2ème cas : I a I ≠ 1.

- Si le point Ω d'affixe z_Ω est invariant par s, alors on a $z_\Omega = a\overline{z_\Omega} + b$. Et, $z_\Omega = a\left(\overline{a z_\Omega + b}\right) + b$.

D'où $z_\Omega = \dfrac{a\overline{b} + b}{1 - a\overline{a}}$.

Réciproquement, soit le nombre complexe $z_\Omega = \dfrac{a\overline{b} + b}{1 - a\overline{a}}$, on a $z_\Omega = a\overline{z_\Omega} + b$.

La similitude inverse s possède un point invariant Ω d'affixe $z_\Omega = \dfrac{a\overline{b} + b}{1 - a\overline{a}}$

- Pour tout point M (z) et son image M' (z'), on a : $z' = a\overline{z} + b$ et $z_\Omega = a\overline{z_\Omega} + b$

Alors $z' - z_\Omega = a\left(\overline{z - z_\Omega}\right)$ et $|z' - z_\Omega| = |a|\left|\overline{z - z_\Omega}\right|$ c'est-à-dire ΩM ' = I a I .ΩM.

Si M ≠ Ω, on a arg (z' - z_Ω) = arg a - arg (z - z_Ω).

On démontre que s = h o s_D.

Théorème

Soit s une similitude inverse définie par $z' = a\overline{z} + b$

Si I a I = 1 : s est la symétrie orthogonale (ou réflexion) par rapport à une droite (Δ) si et seulement si $a\overline{b} + b = 0$.

Si $a\overline{b} + b \neq 0$, $s = s_\Delta o t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe $\dfrac{a\overline{b} + b}{2}$

. I a I ≠ 1: s possède un point invariant unique Ω d'affixe $z_\Omega = \dfrac{a\overline{b} + b}{1 - a\overline{a}}$ et s = $h \circ s_\Delta = s_\Delta \circ h$,

où s_Δ est la symétrie orthogonale par rapport à une droite (Δ) contenant Ω et h homothétie de centre Ω et de rapport IaI.

- Remarques

. Dans le cas où $|a| \neq 1$, $h \circ s_D$ est appelée forme réduite de s.

. La droite (Δ) est globalement invariante par la similitude s.

. La droite (Δ') perpendiculaire à (Δ) est aussi invariante par s, et $s = h' \circ s_{D'}$ où h' est l'homothétie $h(\Omega, -|a|)$.

. (Δ) et (Δ') sont appelées première et deuxième invariantes par s.

. Toute similitude indirecte est caractérisée par son rapport, son point invariant et par sa première droite invariante.

. Détermination de l'axe (Δ) :

- On démontre que la direction de l'axe de symétrie (Δ) est telle que l'angle $(Ox, \Delta) = \frac{1}{2}\arg a$.

- L'axe (Δ) est l'ensemble des points M (z) tels que : $a(\bar{z} - \overline{z_\Omega}) = |a|(z - z_\Omega)$.

Si M $\in (\Delta)$ alors M' $\in (\Delta)$ et M' est l'image de M par l'homothétie h, i.e. $z' - z_\Omega = |a|(z - z_\Omega)$

Or, $z' - z_\Omega = a(\overline{z - z_\Omega})$. D'où, si M $\in (\Delta)$ alors $a(\overline{z - z_\Omega}) = |a|(z - z_\Omega)$.