Similitude plane : Fiche 5

Comment déterminer la similitude directe définie par la donnée de 2 points A, B et de leurs images A', B', avec A≠B ?

Méthode complexe

- Choisir un repère orthonormal et préciser les affixes z_A, z_B, $z_{A'}$, $z_{B'}$ des points dans ce repère.

- Déterminer l'expression complexe de la similitude S : z → z ' = az + b, telle que A' = S (A), B '= S(B). On est amené à résoudre le système, d'inconnues a et b :

$$\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases}$$

- Déterminer les éléments caractéristiques de S.

- Si a = 1, alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. S est la translation de vecteur d'affixe b.

- Si a ≠ 1, alors la transformation est la similitude directe :

de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$,

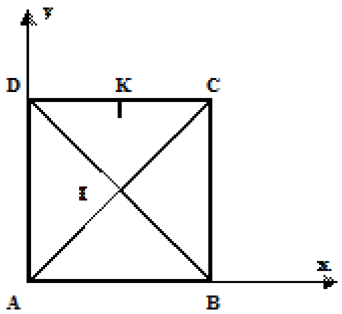
de rapport $k = |a| = \dfrac{A'B'}{AB}$

et d'angle $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \arg(z_{B'} - z_{A'}) - \arg(z_B - z_A)$.

Exemples d'application

ABCD est un carré de sens direct et de centre I. K est le milieu de [CD].
Identifier la similitude directe S définie par : S(A) = I et S(C) = K.

Réponses non détaillées :



- On choisit un repère orthonormal et on donne les affixes des points dans ce repère.

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, on a respectivement $z_A = 0$; $z_B = 1$; $z_C = 1 + i$; $z_D = i$;

$z_I = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$ et $z_K = \dfrac{1}{2} + i$.

- L'écriture complexe de S étant : z' = az +b, on calcule les valeurs de a et b à partir du système d'équations.

On a S(A) = I et S(C) = K c'est-à-dire $z_I = az_A + b$ et $z_K = az_C + b$.
D'où le système :

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ (1+i)a + b = \frac{1}{2} + i \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $a = \frac{1}{4} + \frac{i}{4}$ et $b = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

Et, l'expression complexe de S est :

$$z' = \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right)z + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

- Une fois a et b trouvés, on détermine la nature de S, puis ses éléments caractéristiques.

D'où, S est la similitude directe :

- de rapport $k = |a| = \frac{\sqrt{2}}{4}$,
- d'angle $\theta = \operatorname{Arg} a = \frac{\pi}{4}$
- et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$.

Exercices proposés

- **Exercice 1**

  Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, A′ et B′ d'affixes :

  $z_A = 2 - i$, $z_B = -1 + 2i$, $z_{A'} = 1$ et $z_{B'} = 1 + 6i$.

  Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude directe transformant A en A′ et B en B′

- **Exercice 2**

  Dans le plan complexe, on considère les points A, B, A', B' d'affixes respectives :

  $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 3 + 2i$; $z_1' = -1 + 2i$; $z_2' = -3 + 6i$

  Déterminer l'application complexe z' = az+b associée à la transformation affine qui, au couple (A, B) fait correspondre le couple (A', B'). Quelle est la nature de cette transformation et quels en sont les éléments ?

- **Exercice 3**

  ABCD est un carré de sens direct et de centre O. On désigne par I le milieu de [AB] et par J le milieu de [OB].

  Identifier dans chaque cas la similitude directe S définie par :

  a) S(A) = O ; S(B) = D
  b) S(A) = O ; S(I) = D
  c) S(I) = C ; S(O) = D

d) S(I) = J ; S(J) = O

- **Exercice 4**

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude directe transformant A en B et B en C.

- **Exercice 5**

ABCD est un carré direct de centre I. Soit J le milieu du segment [CD].
On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(A;\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (unité : 3 cm).

1. a) Donner les affixes respectives des points A, B, C, D, I et J.

b) Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.
2. a) Déterminer les éléments caractéristiques de s.
b) Calculer l'affixe du point E tel que s(E) = A. Placer le point E sur la figure.

- **Exercice 6**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ l'unité graphique est 2 cm. On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives : a = 2, b = 2+3i, c = 3i , $d = -\frac{5}{2}+3i$, $e = -\frac{5}{2}$.
1. Placer ces cinq points sur un graphique que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Démontrer que OABC et ABDE sont deux rectangles et qu'ils sont semblables.
3. Étude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE
a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S qui transforme O en A et A en B.
b. Démontrer que la similitude S transforme OABC en ABDE.
c. Quel est l'angle de la similitude S ?
d. Soit Ω le centre de cette similitude. En utilisant la composée S o S, démontrer que le point Ω appartient aux droites (OB) et (AD). En déduire la position du point Ω.

- **Exercice 7**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.
1. On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et 5i.
a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S qui transforme O en A et B en O.
b. Déterminer les éléments caractéristiques de S. On note Ω son centre.
c. Déterminer le point S o S (B) ; en déduire la position du point Ω par rapport aux sommets du triangle ABO.
2. On note D la droite d'équation x - 2y = 0, puis A' et B' les points d'affixes respectives 8+4i et 2+i.
a. Démontrer que les points A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite D.
b. Vérifier que S(B') =A'.

c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre [A'B].

- **Exercice 8**

Dans le plan complexe, on donne les quatre points A, B, C, D d'affixes respectives :

$z_A = -2+6i$, $z_B = 1-3i$, $z_C = 5+5i$, $z_D = 2+4i$.

1. Soit S la similitude qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' déterminée par : $z' = 3iz + 13 - 9i$.

a. Donner les éléments de cette similitude : point invariant Ω, rapport, angle.

b. Quelle est l'image par S du point C ? du point D ? Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.

2. Soit R la similitude déterminée par R(B)=C et R(D)=A.

a. Trouver la relation liant l'affixe z d'un point M et l'affixe z' de son image R(M).

b. Donner les éléments de cette similitude.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.

c. Que représente le point D pour le triangle ABC ?