Limite d'une fonction

1. Fonctions de référence :

X_0 est un réel quelconque.

1.1 Fonction constante : $f(x)=a \quad (a \in R)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=a$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=a$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x)=a$$

1.2 Identité de IR : $f(x)=x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x)=x_0$$

1.3 Fonction inverse : $f(x)=\frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=0$$

1. 4 Fonctions trigonométriques

$$\lim_{x \to x_0} \sin x=\sin x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \cos x=\cos x_0$$

Remarque
Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite à l'infini.
Et plus généralement, les fonctions périodiques n'ont pas de limite à l'infini.

2. Opérations sur les limites

2.1 Limite d'une somme :

lim f	lim g	lim (f+g)
l	l'	l+l'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée
l	∞	∞

2.2 Limite d'un produit :

lim f	**lim g**	**lim (f.g)**
l	l'	l.l'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$l \neq 0$	∞	∞
0	∞	Forme indéterminée

2.3 Limite d'un quotient :

lim f	**lim g**	**lim (f/g)**
l	$l' \neq 0$	l/l'
∞	∞	Forme indéterminée
l	∞	0
0	0	Forme indéterminée
$l > 0$	0^+	$+\infty$
$l > 0$	0^-	$-\infty$
∞	0	∞

Remarque

Lorsque la limite d'une fonction est de la forme $\frac{l}{0}$ où $l \neq 0$, alors le résultat est ∞. Pour savoir si c'est $+\infty$ ou $-\infty$, on étudie le signe du dénominateur.

***Exemple** :* $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

2.4 Limite d'une fonction irrationnelle :

Si $f(x) \geq 0$ dans un intervalle ouvert contenant x_0 et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ alors $\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = +\infty$

Les formes indéterminées

- **Limite d'un polynôme :**

La limite d'une fonction polynôme quand x tend vers l'infini, est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

Exemple :

$$f(x)=x^2-x+1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left[1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$$

- **Limite d'une fonction rationnelle**

La limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur (quand x tend vers l'infini)

Exemple : $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^3-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^3-1}=\frac{+\infty}{+\infty}=F.I$$

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

Si la limite d'une fonction rationnelle en x_0 est de la forme $\frac{0}{0}$, on met $x-x_0$ en facteur et on simplifie

Exemple : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{0}{0}=F.I$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

- **Limite d'une fonction irrationnelle**

Si la limite d'une fonction irrationnelle est de la forme $\frac{0}{0}$ ou $+\infty-\infty$, on lève l'indétermination en utilisant l'expression conjuguée..

Si elle est de la forme $\frac{\infty}{\infty}$, on met les termes de plus hauts degrés en facteur

- **Limite des fonctions trigonométriques**

Limites classiques

- $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=0$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

3. Limites et inégalités

Théorème 1

Soient $f(x) \leq g(x)$ quel que soit x .

- si $\lim f(x) = l$ et $\lim g(x) = l'$ alors $l \leq l'$

- si $\lim f(x) = +\infty$ alors $\lim g(x) = +\infty$

- si $\lim g(x) = -\infty$ alors $\lim f(x) = -\infty$

Théorème 2

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quel que soit x, et $\lim f(x) = \lim h(x) = l$ alors $\lim g(x) = l$

Théorème 3

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ équivaut à $\lim_{x \to x_0} |f(x) - l| = 0$

Conséquence

Si $|f(x) - l| \leq g(x)$ quel que soit x et si $\lim g(x) = 0$ alors $\lim f(x) = l$

Théorème 4

Soit I un intervalle et x_0 un élément de I

Si g est bornée sur I et $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, alors $\lim_{x \to x_0} g(x) . f(x) = 0$

4. Unicité de la limite

Théorème

Si une fonction f admet une limite en un point x_0, ou à l'infini, alors cette limite est unique