

Séquences 3 : Equations complexes

1. Equations du second degré dans \mathbb{C}

1.1 Racine carrée dans \mathbb{C}

1.1.1 Définition

Soit Z un nombre complexe . On dit que z est une racine carrée de Z si $z^2 = Z$.

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.

1.1.2 Détermination

Posons $Z = a + ib$ et $z = x + iy$. $z^2 = Z$ si et seulement si $(x + iy)^2 = a + ib$, qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Exemple

Calculer les racines carrées de $z = 3 - 4i$.

Les racines carrées de $3 - 4i$ se calculent par le biais du système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ 2xy = -4 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) donne $2x^2 = 8$, ce qui donne $x = -2$ ou $x = 2$. (3) donne $y = \frac{-4}{(2x)}$, c'est à dire $y = 1$ ou $y = -1$.

Les racines carrées de z sont : $-2 + i$ et $2 - i$.

1.2 Équation du second degré dans \mathbb{C}

Soit (E) l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b, c sont des nombres complexes avec a non nul.

On note $\Delta = \delta^2$ le discriminant de l'équation (E) .

Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution double $z' = z'' = \frac{-b}{(2a)}$

Si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) admet deux solutions distincts :

$$z' = \frac{-b - \delta}{(2a)} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{-b + \delta}{(2a)}$$

Dans ce cas : $az^2 + bz + c = a(z - z')(z - z'')$

Exemple

résoudre dans \mathbb{C} $z^2 - 2z - 1 + 2i = 0$

$\Delta = 4(3 - 4i)$. Les racines de Δ sont $\delta_1 = 2(2 - i)$ et $\delta_2 = 2(-2 + i)$.

Les solutions de l'équation sont : $z' = \frac{3 - i}{2}$ et $z'' = \frac{-1 + i}{2}$

2. Racine n-ième d'un nombre complexe

2.1 Formule de Moivre

Pour tout entier relatif n et pour tout nombre θ , on a :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n \theta + i \sin n \theta$$

Exemple

$$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^3 = \left(\cos 3 \cdot \frac{\pi}{6} + i \sin 3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = i$$

2.2 Racine n-ième d'un nombre complexe

Soit $Z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ un complexe donné. On appelle racine n-ième de Z tout nombre z tel que $z^n = Z$ ($n \in \mathbb{N}$).

Posons: $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Il vient: $\rho^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

En utilisant la formule de Moivre, on a :

$$\rho^n(\cos n \theta + i \sin n \theta) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Ce qui équivaut à :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

On a donc:
$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right] = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

En donnant à k les valeurs $0, 1, 2, \dots, (n-1)$, on obtient n valeurs.

Tout nombre complexe non nul $Z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ admet exactement n racines n -ièmes.

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] = \sqrt[n]{r} e^{i \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)} \quad k = 0, 1, \dots, (n-1)$$

Leurs images sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de centre O , de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Exemple : Déterminer les racines quatrièmes de i .

Racines n -ièmes de l'unité

$Z = 1$, on a $r = 1$ et $\alpha = 0$

Donc $z^n = 1$ admet pour solutions :

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \quad \text{avec } k = 0, 1, 2 \dots, (n-1)$$

Propriétés des racines n -ièmes de l'unité

La somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle.

Les images des racines n -ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Si z est une racine n -ièmes de l'unité, son inverse l'est aussi.

-Le produit des deux racines n -ièmes de l'unité est une racine n -ièmes de l'unité.

Exemple : racines cubiques de 1.

En faisant $n = 3$, on peut dire que $z^3 = 1$ admet trois solutions :

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$$

à $k = 0$ correspond : $z_0 = 1$

$$\text{à } k = 1 \text{ correspond : } z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{à } k = 2 \text{ correspond : } z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{On convient de poser : } j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

D'où : Le nombre 1 a trois racines cubiques : $1, j, j^2$. Les images sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité.

