Correction exercice sur la propagation d'onde sinusoïdale

Sujet 1 :

L'extrémité O d'une longue corde vibrante tendue horizontalement est animée d'un mouvement vibratoire, sinusoïdal, transversal d'équation horaire :

$y_0 = 4.10^{-3}\sin 200\pi t$ (y_0 en m ; t en s)

La célérité des ondes le long de la corde est $v=20 m.s^{-1}$.

On néglige l'amortissement et la réflexion des ondes a l'extrémité de la corde.

1 . a Déterminer la fréquence du mouvement de O.

L'équation horaire est de la forme : yo=a.sin(wt+f) (a=amplitude ;w=pulsation ; wt+f=phase à la date t ; f phase à t=0)

La phase étant nulle à t=0, cela signifie qu'à t=0, yo=0 et que le point O se déplace dans le sens des y>0.

La pulsation w est liée à la fréquence N par la relation :

$$\omega = 2\pi N \; ; \qquad N=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{200\pi}{2\pi}=100\,\text{Hz}$$

-b Calculer la longueur d'onde λ

La longueur d'onde λ est la distance parcourue par l'onde pendant la durée T, soit :

$$\lambda = vT=\frac{v}{N}=\frac{20\,ms^{-1}}{100\,s^{-1}}=0{,}2\,m$$

2-Écrire l'équation horaire du mouvement d'un point M de la corde d'abscisse OM=x.

Application numérique : x=25cm.

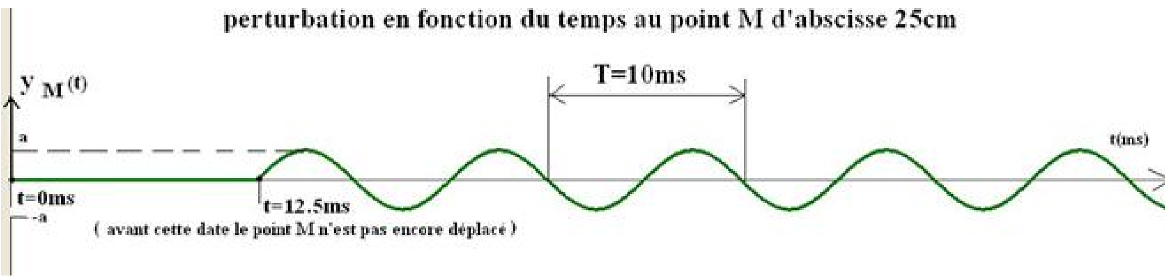
Le point M subit une perturbation identique à celle du point O avec un retard égal à la durée de propagation (xM/v) de O en M:

$$y_M(t)=y_0(t-\frac{x}{v})=a\sin\omega(t-\frac{x}{v})=a\sin(\omega t-\omega\frac{x}{v})$$

$$y_M(t)=a\sin(\omega t-\frac{2\pi x}{T v})=a\sin(\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda})=4.10^{-3}\sin(200\pi t-\frac{2\pi 25}{20})=4.10^{-3}\sin(200\pi t-\frac{5\pi}{2})$$

La vibration en M est donc en retard de phase de 5π/2 par rapport à O.

Remarque : l'équation ci-dessus décrit la perturbation en M pour $t>x_M/v$. En effet, la perturbation commence en M à la date $t=x_M/v$=0.25/20=1,25.10-2s=12,5ms. Avant cette date, le point M est immobile. (voir la figure ci-dessous)



3-Soit P un point de la corde tel que OP=55cm.

Déterminer :

a- le nombre de points de la corde, entre O et P qui vibrent en opposition de phase avec le point O.

b- La position de ces points par rapport au point O.

Ces points sont espacés d'un nombre impair de λ/2.
Si x est l'abscisse de ces points,

$$0<x=(2k+1)\frac{\lambda}{2}=(2k+1)10\,cm<55\,cm$$

Les valeurs de k et de x satisfaisant à cette condition sont :

k	0	1	2
X(cm)	10	30	50

Il y a donc 3 points vibrant en opposition de phase.

4-a Ecrire l'équation cartésienne de la courbe représentant l'aspect de la corde à l'instant t=3.5.10-2s.

Reprenons l'équation générale de l'onde sinusoïdale :

$$y(x,t)=a\sin(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}.x)$$

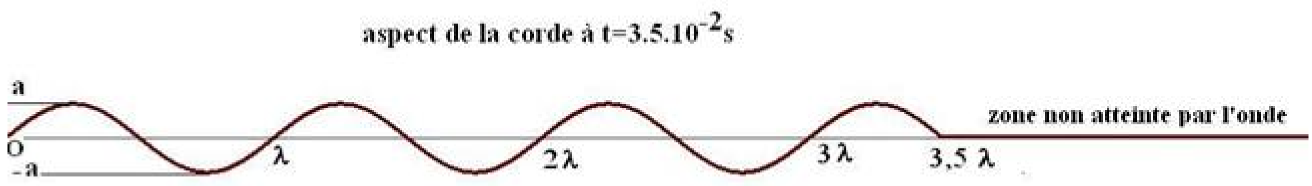
Soit numériquement :

$$y(x,t=3.10^{-2})=4.10^{-3}\sin(200\pi.3.5.10^{-2}-\frac{2\pi}{\lambda}.x)=4.10^{-3}\sin(7\pi-\frac{\pi}{10}.x)(x\,en\,cm)$$

(équation valable tant que 0< x < v.t)

-b Représenter l'aspect de la corde à cet instant.

L'onde s'est alors propagée de :
X=v x t=20m/s x 3,5.10-2s=0.7m soit 0.7/0.2=3,5λ.
Au delà les points de la corde n'ont pas encore été déplacés.
D'où l'aspect de la corde :



Sujet 2

Une lame vibrante est animée d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude a et de fréquence N=10Hz. Elle est munie d'une pointe qui frappe verticalement la surface de l'eau en un point O.

Le mouvement de la lame débute à l'instant t=0 à partir de sa position d'équilibre .L'extrémité de la lame va dans le sens positif avec une vitesse verticale v_o=0.628m.s^{-1}.

1-Décrire les phénomènes observés à la surface de l'eau.

Une onde transversale circulaire se propage à partir du point O.

2-La célérité de propagation des ondes à la surface de l'eau est v=0,40m/s.

a-Ecrire l'équation horaire du mouvement de O et celle d'un point M à la distance d=14cm de O

Équation horaire du point O :

$$y_0(t)=a\sin(\omega t+\phi) \quad \text{avec } \omega = 2\pi N = 2\pi.10 = 20\pi \text{ rad/s}$$

A t=0 ; y=a.sinϕ=0 et donc ϕ=0 ou p.

La vitesse v est la dérivée par rapport au temps de y,

$$v(t) = a\omega\cos(\omega t+ \phi) \text{ et donc } v_0 = a\omega\cos\phi = +0{,}628\text{m/s}$$

V(t) étant positif à t=0 ; la seule solution possible est cosϕ=1 et donc ϕ=0 .

Et l'amplitude a=0,628/ω=0.628/62.8=10^{-2}m.

Finalement :

$$y_0(t) = 1.10^{-2}\sin(20\pi t) \text{ (en m)}$$

Équation horaire du point M :

La vibration en M s'effectue avec un retard t =d/v par rapport à la vibration en O :

$$y_M(t)=y_0(t-\tau)=y_0(t-\frac{d}{v})$$

$$y_M(t)=a\sin\omega(t-\frac{d}{v})=a\sin(\omega t-\frac{2\pi d}{T v})=a\sin(\omega t-\frac{2\pi d}{\lambda})$$

Calculons la longueur d'onde :

$$\lambda=v.T=\frac{v}{N}=\frac{0{,}4}{10}=0{,}04\,m=4\,cm$$

La vibration en M est déphasée par rapport à celle de O de :

$$\Delta\phi=\frac{2\pi d}{\lambda}=\frac{2\pi.14}{4}=7\pi$$

L'équation horaire s'écrit donc :

$$y_M(t)=1.10^{-2}\sin(20\pi t-7\pi)$$

Cette équation ne s'applique que si t>d/v=14cm/40cm.s^{-1}=0.35s comme l'indique le graphe ci-dessous. Avant cette date, le point M est immobile car il n'a pas encore reçu l'onde.

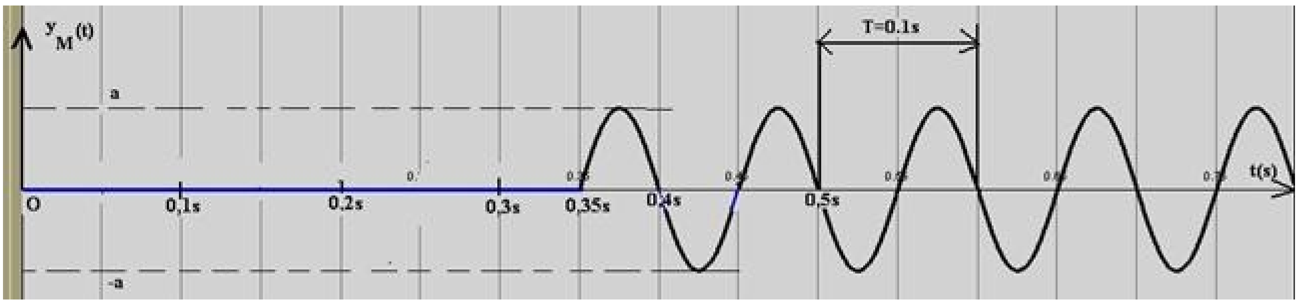


Fig1

b-Comparer les mouvements vibratoires de M et O.

Si deux points du milieu sont espacés de $\Delta x=\lambda$, les vibrations en ces points sont décalées dans le temps de $\Delta t=T$ et présente un déphasage de $\Delta\phi=\omega T=2\pi$ (voir tableau ci-dessous)

Déphasage $\Delta\phi$	Décalage horaire Δt	Décalage spatial Δx
2p	T	λ
$\Delta\phi=7\pi$	Δt	Δx

Sachant que le déphasage est ici de 7π, nous pouvons en déduire

le décalage horaire par la relation de proportionnalité:

$$\frac{2\pi}{7\pi}=\frac{T}{\Delta t}=\frac{\lambda}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad \Delta t=\frac{7}{2}T=3{,}5\,T \text{ et } \Delta x=7.\frac{\lambda}{2}$$

Le décalage horaire est multiple d'un nombre impair de T/2 ; les vibrations sont donc en opposition de phase.

C'est ce que montre la comparaison des deux graphes $y_M(t)$ et $y_O(t)$ (fig1 et fig2)

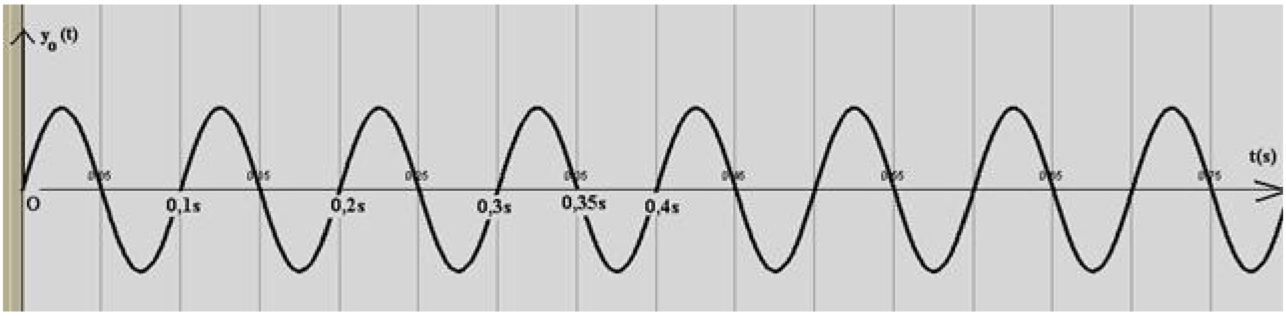


Fig 2.