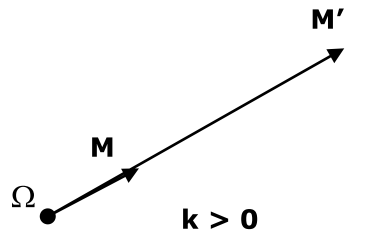
# HOMOTHETIES

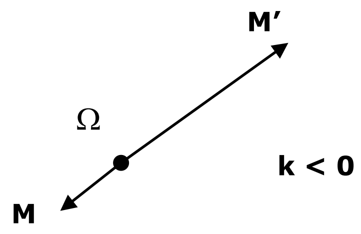
## 1. Définition

Etant donné un point Ω du plan P et un réel k non nul, on appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application h qui, à tout point M, fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. On note h (Ω, k).

Si k = 1, l'homothétie se réduit à l'application identique.

Si k = -1, l'homothétie est équivalente à la symétrie par rapport à Ω (ou symétrie centrale de centre Ω).
Dans la suite nous supposerons $k \neq 1$.



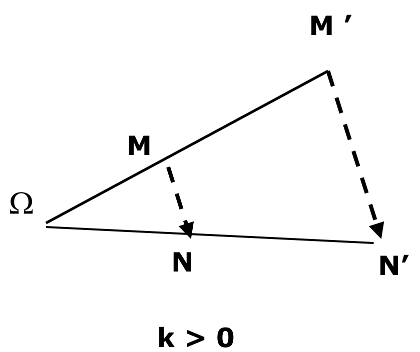

## 2. Propriétés et théorèmes

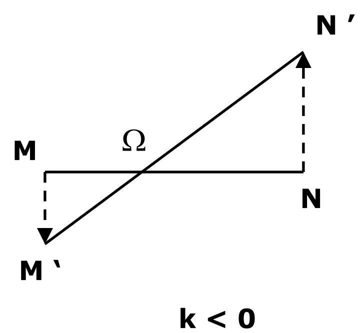
Les points Ω, M et son image M' sont alignés. (d'après $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$)

• ***Point invariant*** *:*
Le centre Ω de l'homothétie est le seul point invariant de l'application.
(pour la démonstration, supposez qu'il existe un autre point invariant).

• ***Réciproque*** *:* Toute homothétie est bijective.
Toute homothétie de centre Ω et de rapport k admet une réciproque qui est l'homothétie de centre Ω et de rapport 1/k : $[h(\Omega,k)]^{-1} = h(\Omega,1/k)$

• ***Caractérisation d'une homothétie*** *:* Une homothétie de rapport k transforme un bipoint (M,N) en un bipoint (M',N') : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.



Démonstration : Soit l'homothétie h( $\Omega$ ,k), on a $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega N'} = k\overrightarrow{\Omega N}$. Alors :
$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{\Omega N'} - \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega N} - k\overrightarrow{\Omega M}$, d'où $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.
Réciproque : soit f une application qui transforme le bipoint (M,N) en (M',N') tel que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ $(k \neq 1)$.

On applique cette relation à un couple (A,A') fixes et (M,M') quelconque i.e. $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$.

- si A et A' sont confondus, on a $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$. f et l'homothétie de centre A et de rapport k.
- si A et A' sont distincts, il existe un point $\Omega$ sur AA' partageant le segment AA' dans le rapport k, $\left(\dfrac{\overline{\Omega A'}}{\overline{\Omega A}} = k\right)$.

On a : $\overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$, alors $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. Donc f est l'homothétie h( $\Omega$ ,k) qui transforme A en A'.

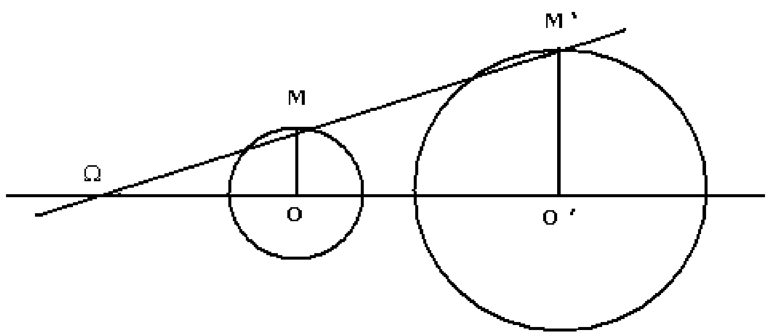
D'où le théorème :
Si une application affine transforme un point fixe A en un point fixe A' et tout point M en un point M' tel que $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$ $(k \neq 1)$, cette application est une homothétie de rapport k.

- A, B, C sont trois points distincts et alignés, il existe une homothétie de centre A, et une seule, qui transforme B en C, c'est l'homothétie de rapport $k = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

- k est un réel non nul $(k \neq 1)$, A, B, A', B' sont des points tels que A, B, A' ne sont pas alignés et $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Alors, il existe une homothétie, et une seule, qui transforme A en A' et B en B' ; c'est l'homothétie de centre $\Omega$ , intersection de (AA') et (BB') et de rapport k.

- ***Image d'un ensemble de points*** :

L'image d'une droite D, par une homothétie, est une droite D' parallèle à D.
L'image d'un cercle C est un cercle C', et le centre de C' est l'image du centre de C, le rayon ce C' est k- fois celui de C.




- ***Cercles homothétiques*** : C et C' sont deux cercles non concentriques, de centres respectifs O et O', de rayons respectifs R et R', avec $(R \neq R')$. Alors, il existe deux homothéties, et deux seulement, transformant C en C'.

- l'un a pour rapport R'/R et pour centre le point $\Omega_1$ de (OO') tel que : $\overrightarrow{\Omega_1 O'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{\Omega_1 O}$

- l'autre a pour rapport -R'/R et pour centre le point $\Omega_2$ de (OO') tel que : $\overrightarrow{\Omega_2 O'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{\Omega_2 O}$.

Chacune des tangentes communes à C et C' passe par l'un des points $\Omega_1$ et $\Omega_2$.

## 3. Composée de deux homothéties-translations

**a) Composée de deux homothéties**

Soient deux homothéties $h_1$ ($\Omega_1$, $k_1$) et $h_2$ ($\Omega_1$ , $k_2$).
- si $k_1.k_2 = 1$ l'application composée $h_2$ o $h_1$ est une translation.
- si $k_1.k_2 \neq 1$ l'application composée $h_2$ o $h_1$ est une homothétie.

**b) Composée d'une homothétie et d'une translation**

En utilisant les propriétés d'une homothétie et d'une translation, on démontre le théorème suivant :

h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k ($k \neq 0$, $k \neq 1$), t est la translation de vecteur $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$), alors, hot et toh sont des homothéties de rapport k dont les centres sont sur la droite passant par Ω et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Exercice : Démontrer que toh et hot sont des homothéties.
Construire les centres J et K des homothéties toh et hot.

Montrer que $\overrightarrow{\Omega J} = \frac{1}{1-k}\vec{u}$ et $\overrightarrow{\Omega K} = \frac{k}{1-k}\vec{u}$.

## 4. Expression analytique

Soit l'homothétie h = h( Ω , k). Soit Ω ($x_0$ , $y_0$), M (x,y), M'(x',y') des points de P tels que h(M)=M' i.e. $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. On a :

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$$

## 5. Expression complexe d'une homothétie

h est l'homothétie de centre Ω d'affixe $z_\Omega$ et de rapport k (réel non nul). L'image de M par h est le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. Si M et M' ont pour affixes respectives z et z',
on a : $z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$

Donc la fonction F de C dans C associée à h est définie par : $z \to z' = F(z)$
avec $F(z) - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$

Exemples :
1) Donner la fonction F de C dans C qui à l'affixe de M associe l'affixe de f (M).

- f est l'homothétie de centre $\Omega$ dont l'affixe est $2 - 3i$ et de rapport $-2$.
- f est l'homothétie de centre $\Omega$ dont l'affixe est $1 + i$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

2) Identifier la transformation qui au point d'affixe z associe le point d'affixe z' :

$z' = -z + 2i$.

$z' = -2z + 3 - 2i$