Dénombrement

1. Généralités sur les ensembles

1.1 Ensemble - Elément

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments de E telle que quel que soit l'objet a, on peut dire sans ambiguïté que a est ou n'est pas un élément de E

Si a est un élément de E, on écrit $a \in E$ si non $a \notin E$

Deux ensembles E et F sont égaux, et on écrit $E = F$, s'ils possèdent les mêmes éléments.

On dit que E est donné en compréhension s'il est défini par une propriété caractéristique de ses éléments.

Exemple : $E=\{x, x \text{ est un nombre entier inférieur ou égal à } 6\}$

On dit que E est donné en extension s'il est défini par la donnée d'une liste de ses éléments
Exemple : $E = \{a,b,c\}$

L'ensemble vide, noté ϕ , est l'ensemble qui n'a aucun élément.

Un ensemble qui n'a qu'un seul élément est un singleton.

1.2 Partie d'un ensemble : Inclusion

1.2.1 Définition

Soit A et E deux ensembles
On dit que A est une partie de E (ou un sous ensemble de E ou inclus dans E) si tous les éléments de A sont éléments de E.

On écrit $A \subset E$
($A \subset E$) signifie :(si $x \in A$ alors $x \in E$)
A n'est pas inclus dans E s'il existe un élément de A qui n'est pas dans E.

1.2.2 Propriétés :

- Quel que soit l'ensemble E
  $E \subset E$ et $\phi \subset E$
- Soient A, B et C des ensembles
  . Si $A \subset B \text{ et } B \subset C$ alors $A \subset C$
  . Si $A \subset B \text{ et } B \subset A$ alors $A = B$

1.3 Ensemble des parties d'un ensemble

Les parties d'un ensemble E constituent un ensemble appelé ensemble des parties de E et noté $P(E)$:

$$P(E) = \{A, A \subset E\}$$

$$A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

Propriétés

Quel que soit l'ensemble E

$E \in P(E)$, $\emptyset \in P(E)$ donc $P(E) \neq \emptyset$

- $Si\ \ E=\emptyset$
  $P(E)=\{\emptyset\}$
- $Si\ \ E=\{a\}$
  $P(E)=\{\emptyset, \{a\}\}$
- $E=\{a,b\}$
  $P(E)=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
- $E=\{a,b,c\}$
  $P(E)=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$

Si E a n éléments alors P(E) en a 2^n

1.4 Complémentaire d'une partie

1.4.1 Définition

Soient A et E deux ensembles

L'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A est appelé complémentaire de A dans E et noté

$C_E A$ ou $\overline{A}$

$\overline{A}=C_E A=\{x, x \in E\ et\ x \notin A\}$

Si x est un élément de E, on a : $x \in \overline{A}\ \ si\ \ et\ \ seulement\ \ si\ \ x \notin A$

1.4.2 Propriétés

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E

$\overline{E}=\emptyset\ ;\ \overline{\emptyset}=E$

$\overline{\overline{A}}=\overline{(\overline{A})}=A$ (On dit que A et $\overline{A}$ sont complémentaires (l'un de l'autre))

$A=B\ \ si\ \ et\,seulement\ \ si\ \overline{A}=\overline{B}$

$A \subset B\ \ si\ \ et\ \ seulement\ \ si\ \ \overline{B} \subset \overline{A}$

$A=\overline{B}\ \ si\ \ et\ \ et\ \ seulement\ \ si\ \ \overline{A}=B$

1.5 Réunion et intersection de deux ensembles

1.5.1 Définitions

Soients A et B deux ensembles, la réunion de A et B notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B .

$A \cup B=\{x, x \in A\ ou\ x \in B\}$

Et l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et B est l'intersection de A et B et noté $A \cap B$

$A \cap B=\{x, x \in A\ et\ x \in B\}$

1.5.2 Propriétés :

Quels que soient A et B

$A\subset A\cup B \qquad A\cap B\subset A$
$B\subset A\cup B \qquad A\cap B\subset B$

$A\cup A=A \qquad A\cap A=A$
$A\cup B=B\cup A \qquad A\cap B=B\cap A$
$A\cup\emptyset=A \qquad A\cap\emptyset=\emptyset$
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \qquad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \qquad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Si $A\subset E$

$A\cup\overline{A}=E \qquad A\cap\overline{A}=\emptyset$

$A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A$

$A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B$

Si $A\subset B$ alors $A\cap C\subset B\cap C$ et $A\cup C\subset B\cup C$ quel que soit C

Loi de Morgan :

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

1.6 Partition d'un ensemble

Soient E un ensemble et A_1, A_2, …, A_n des parties de E.

$\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ est une partition de E si les A_i sont tous non vides et si quel que soit $x\in E$ il existe un et un seul A_i tel que $x\in A_i$

On montre que $\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ est une partition de E si :

$A_i\neq\emptyset$ *, quel que soit* i

$A_i\cap A_j=\emptyset$ *si* $i\neq j$

$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=E$

Exemple : $E\neq\emptyset$; $A\subset E$; $A\neq\emptyset$ *et* $A\neq E$

$\{A,\overline{A}\}$ est- il une partition de E ?

$A\neq\emptyset$, $\overline{A}\neq E$ *car* $A\neq E$
$A\cap\overline{A}=\emptyset$
$A\cup\overline{A}=E$

$\{A,\overline{A}\}$ est donc une partition de E

1.7 Ensemble produit

On appelle produit (cartésien) de A et B l'ensemble des couples (x ;y) tels que $x \in A$ et $y \in B$. On le note : $A \times B$

$$A \times B = \{(x;y) / x \in A \ et \ y \in B\}$$

Remarques

- (x ; y) = (x'; y') $\Leftrightarrow$ x = x' et y = y'
- (x ; y) $\neq$ (y ; x) sauf si x = y
- Si A = B , $A \times B = A \times A = A^2$

Généralisation

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) / x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, et \ x_n \in A_n\}$$

Ses éléments sont appelés des n-uplets, n-uples, n-tuples, ou n-listes

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \Leftrightarrow x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \cdots, x_n = x'_n$$

Si $\begin{array}{l} A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A \\ A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = A \times A \times \cdots \times A = A^n \end{array}$

1.8 Factorielle

Soit $n \in N$, on appelle « factorielle (de) n » le réel noté $n!$ défini par

Si $n = 0$, $n! = 0! = 1$

Si $n \neq 0$, $n! = n(n-1) \cdots 3 \times 2 \times 1$

Exemples : $\begin{array}{l} 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040 \end{array}$

Propriétés

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \times 2 \times 1$$
$$n! = n(n-1)!$$
$$n! = n(n-1)(n-2)!$$

Exemple : $7! = 7 \times 6 \times 5 \cdots 1 = 7 \times 6! = 7 \times 6 \times 5!$

1.9 Cardinal d'un ensemble

Le cardinal d'un ensemble E est le nombre d'éléments de E. On le note $cardE$.

Propriétés :

- Si $E = \emptyset$, $cardE = 0$
- Si $A \cap B = \emptyset$, $card(A \cap B) = cardA + cardB$
- Dans le cas général : $card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$
- $Si \ A \subset B, \ alors \ cardA \ \leq cardB$

$$card(A \times B) = (cardA)(cardB)$$
$$card(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = (cardA_1)(cardA_2) \cdots (cardA_n)$$
$$card(A^2) = (cardA)^2$$
$$card(A^n) = (cardA)^n$$

2. Dénombrement d’ensembles finis

2.1 Arrangement

2.1.1 Définition

Soit E un ensemble ayant n éléments et $p \leq n$.

Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E, deux à deux distincts.

Exemples :

- $E=\{a,b,c,d\}$
  $(a,b,c),(a,c,d),(d,b,a)$ sont des arrangements de 3 éléments de E
  (a,b,a) n’est pas un arrangement d’éléments de E

- $E=\{1,2\cdots 6\}$

Un nombre de 3 chiffres différentiels écrit avec les éléments de E est un arrangement de 3 éléments de E.

- Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10

  On tire successivement et sans remise 3 jetons de l’urne.

  Le résultat peut se représenter par un triplet (x_1, x_2, x_3) ou x_1 désigne le numéro du 1er jeton, x_2 désigne le numéro de 2e jeton, x_3 désigne le numéro du 3e jeton

  Comme le triage est sans remise ; x_1, x_2, x_3 sont tous différents

  On peut donc assimiler le résultat des triages à un arrangement de 3 éléments pris parmi les 10.

Remarque
Deux arrangements distincts diffèrent soit par la nature soit par l’ordre des éléments :

$$(a,b,c)\neq(a,c,b)$$
$$(a,b,c)\neq(a,c,d)$$

2.1.2 Nombre d’arrangements

Considérons un ensemble E ayant n éléments et soit $p\leq n$. On veut dénombrer tous les arrangements de p éléments de E.

- Pour le premier élément de l’arrangement, on a n possibilités.
- Avec chacune de ces n possibilités, on peut former (n-1) arrangements en prenant un élément parmi les (n-1) éléments restants. On peut donc au total former n(n-1) arrangements de deux éléments de E.
- Avec chacun des ces n(n-1) possibilités on peut former (n-2) arrangements de 3 éléments en lui associant un élément pris parmi les (n-2) autres ; donc au total, on peut avoir

n(n-1)(n-2) arrangements de 3elements de E.

………………..

Lorsque le (p-1) élément est choisi, on n’a plus que (n-p+1) choix pour le pe élément pour former les arrangements de p éléments

On a alors $n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ arrangements de p éléments de E possibles.

Théorème :

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble ayant n éléments est :

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

2.2 Permutation

E étant un ensemble ayant n éléments. Une permutation des éléments de E est un arrangement de n éléments de E.

Le nombre de permutation des éléments de E est donc :

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Théorème

Le nombre de permutation de n éléments est : $P_n = n!$

2.3 Combinaison

2.3.1 Définition

Soit un ensemble ayant n éléments et $p \leq n$; une combinaison de p éléments de E est une partie de E ayant p éléments

Exemple

- $E = \{a, b, c\}$

  $\{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ sont des combinaisons de 3 éléments de E
- Un sac contient 10 boules.

On extrait simultanément de ce sac 3 boules. On peut assimiler un résultat de cette extraction à une combinaison de 3 éléments.

2.3.2 Nombre de combinaison

Soit E un ensemble tel que $CardE = n \ avec \ p \leq n$

Posons $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et considérons $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\} \subset E$

On peut former $p!$ permutations des éléments de A. Mais comme une permutation des éléments de A est un arrangement de p éléments de E. on a $p!$ arrangements des p éléments de E (formés avec les éléments de A)

On a donc $p!$ arrangements avec une combinaison de p éléments de E.

Si C_n^p est le nombre de combinaisons de E, on peut obtenir au total $p! \ C_n^p$ arrangements. Et on obtient tous les arrangements de cette façon.

Or le nombre d'arrangements de p éléments est A_n^p , on a l'égalité : $p! \ C_n^p = A_n^p$

Théorème

Le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

Propriétés

$C_n^0 = 1$

$C_n^1 = n$

$C_n^n = 1$

$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$

- ***Triangle de Pascal :***

n \ p	0	1	2	3		p	p+1
0	C_0^0						
1	C_1^0	C_1^1					
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2				
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			
⋮							
n	C_n^0	C_n^1				C_n^p	$+ C_n^{p+1}$
							=
n+1	C_{n+1}^0	C_{n+1}^1					C_{n+1}^{p+1}

Ce qui donne :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 + 10 10 5 1

=

1 6 15 20 15 6 1

……..

- **Développement de Newton**

On montre que quels que soient a, b réels, et $n \in N$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^p a^{n-p} b^p + \cdots + C_n^n a^0 b^n$$

ou

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Exemples :

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \cdots + C_n^n x^n$$
$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

Application : Nombre des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble à n éléments

Le nombre de parties à 0 élément est C_n^0

1 élément est C_n^1

2 éléments est C_n^2

…..

p éléments est C_n^p

……

n éléments est C_n^n

Le nombre des parties de E est égal à $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n = card E$