Courbes de Bézier

Les *courbes de Bézier* sont des courbes composées de barycentres de points appelés *points de contrôle* pondérés par des coefficients qui sont des fonctions particulières d'un paramètre t. Elles sont très utiles en graphisme et interviennent par exemple dans la définition des polices de caractères sur ordinateur.

Courbes de Bézier linéaires

Les courbes de Bézier linéaires sont de degré 1 en t et dépendent de deux points de contrôle A et B, elles sont définies par les points :

$$G_t = bar\{(A; 1-t), (B; t)\} \quad \text{avec} \quad t \in [0; 1]$$

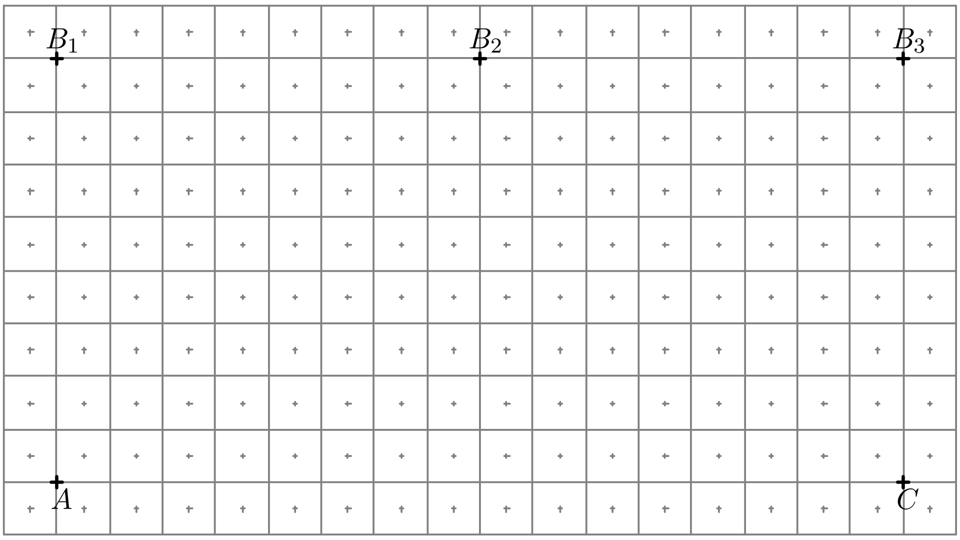
Prouver que l'ensemble des points G_t pour $t \in [0; 1]$ est le segment$[AB]$.

Courbes de Bézier quadratiques

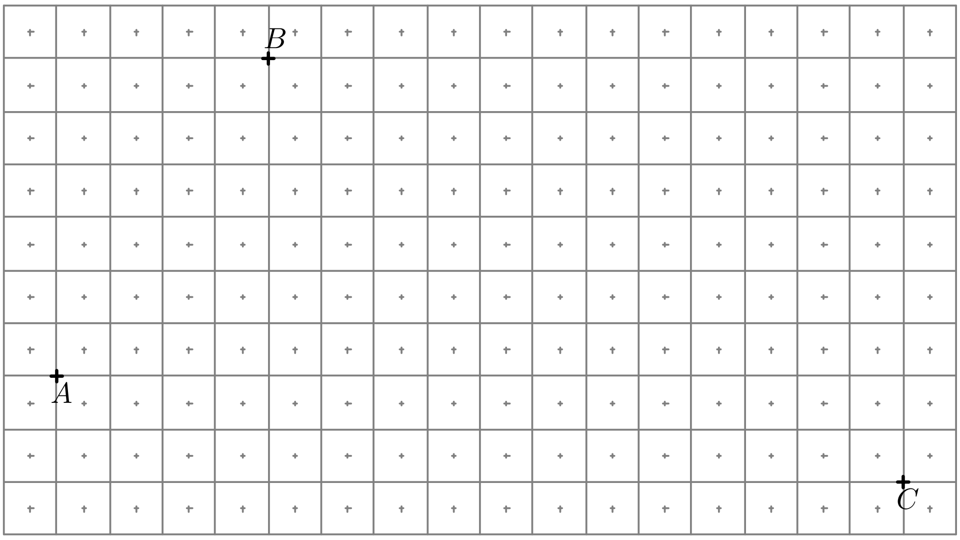
Les courbes de Bézier quadratiques sont de degré 2 en t et dépendent de trois points de contrôle A, B et C, elles sont définies par les points :

$$G_t = bar\{(A; (1-t)^2), (B; 2t(1-t)), (C; t^2)\} \quad \text{avec} \quad t \in [0; 1]$$

1. Prouver que l'ensemble des points G_t pour $t \in [0; 1]$ est une courbe d'extrémités A et C contenue dans le triangle ABC.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG_t}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et du paramètre t.
3. En déduire les coordonnées du point G_t dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ en fonction de t.
4. Calculer les coordonnées des points $G_{t=0}$, $G_{t=\frac{1}{4}}$, $G_{t=\frac{1}{2}}$, $G_{t=\frac{3}{4}}$ et $G_{t=1}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.
5. Dans le cas où $B = B_1$ placer ces points sur le dessin au verso et en déduire l'allure de la courbe de Bézier quadratique contrôlée par les points A, B_1 et C.
6. Dessiner la courbe de Bézier quadratique contrôlée par les points A, B_2 et C puis la courbe de Bézier quadratique contrôlée par les points A, B_3 et C. Que constate-t-on lorsque le point de contrôle B bouge ?



7. On considère désormais un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$, les coordonnées des points A, B et C sont notées respectivement $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ et $(x_C; y_C)$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG_t}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ et du paramètre t. En déduire les coordonnées du point G_t dans le repère $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ en fonction de t et des coordonnées des points A, B et C.
8. Après avoir choisi un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ puis calculé dans celui-ci les coordonnées du point G_t en fonction de t à l'aide de la question précédente, dessiner ci-dessous la courbe de Bézier quadratique contrôlée par les points A, B et C :



Pour aller plus loin...

Les courbes de Bézier cubiques sont de degré 3 en t et dépendent de quatre points de contrôle A, B, C et D, elles sont définies par les points :

$$G_t = bar\{(A; (1-t)^3), (B; 3t(1-t)^2), (C; 3t^2(1-t)), (D; t^3)\} \quad \text{avec} \quad t \in [0; 1]$$