EXERCICES DE TRIGONOMÉTRIE

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

EXERCICE 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1°) $\cos(2x)=-\frac{1}{2}$; 2°) $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3°) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$; 4°) $\sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5°) $tg(2x)=1$; 6°) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7°) $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$; 8°) $\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$;

9°) $tg(2x)=\sqrt{3}$;10°) $\cos(3x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;11°) $2\sin(2x)=\sqrt{3}$;12°) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

EXERCICE 2 :

En utilisant les formules de transformations ou d'addition calculer les expressions

1°) $A=(\sin x-\sin y)^2+(\cos x-\cos y)^2 \quad avec \quad x-y=\frac{\pi}{3}$

1°) $B=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)+\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cot an(-x)$;

2°) $C=\cot an(-x)+\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cot an(2\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos x$;

3°) $D=\cos(2\pi-x)+\cos(-x)+tg(2\pi+x)+\cot an(-x)$;

4°) $E=\cot an\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\tan(\pi-x)+\cos(-x)+\sin(-x)$.

EXERCICE 3 :

Déterminer l'angle α en radians, dans les cas suivants :

1°) $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{1}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$; 2°) $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{1}{2}\end{cases}$; 3°) $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$; 4°) $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

5°) $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{1}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$; 6°) $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$; 7°) $\begin{cases}\cos\alpha=-1\\ \sin\alpha=0\end{cases}$; 8°) $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

9°) $\begin{cases}\cos\alpha=0\\ \sin\alpha=1\end{cases}$; 10°) $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{1}{2}\end{cases}$; 11°) $\begin{cases}\cos\alpha=1\\ \sin\alpha=0\end{cases}$; 12°) $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{1}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

13°) $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$; 14°) $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$; 15°) $\begin{cases}\cos\alpha=0\\ \sin\alpha=-1\end{cases}$; 16°) $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{1}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

EXERCICE 4 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x puis placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions.

a) $2\cos(x)-1=0$; b) $2\sin(2x)-\sqrt{3}=0$; c) Vérifier que : $4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$ puis résoudre $-4\sin^2(x)+2\left(\sqrt{3}-1\right)\cos(x)+4-\sqrt{3}=0$; d) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)=0$.

2°) a) Calculer $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$ et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^2+2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{6}=0$

b) En déduire la résolution dans [0 ; 2π] de : $-4\sin^2(y)+2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cos(y)+4-\sqrt{6}=0$. Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

3°) a) Résoudre x ∈ $\mathbb{R}$, $\cos x+\sin x=-1$; $\cos x+\sin x=3$.

b) Après avoir vérifié que : $\sin(2x)=\left(\sin x+\cos x\right)^2-1$ résoudre les équations suivantes : $1-\dfrac{1}{2}\sin(2x)+\sin(x)+\cos(x)=0$. et $1+\dfrac{1}{2}\sin(2x)+\sin(x)+\cos(x)=0$

3°) Résoudre $(x;y)\in[0\,;2\pi]\times[0\,;2\pi]$ le système $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{4} \\ \cos(x)\cos(y)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

4°) Résoudre $(x;y)\in[0\,;\pi]\times[0\,;\pi]$ le système $\begin{cases} \cos(x+y)=\dfrac{1}{2} \\ \cos(x-y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

5°) Simplifier les expressions :

a) $A=\sin(x-y)\cos(x+y)-\sin(x+y)\cos(x-y)$.

b) $B=\dfrac{\cos(2x)}{1+\sin(2x)}$

6°) Démontrer que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ *et* $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ *sachant que* $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$

EXERCICE 5 :

On considère l'équation (E) : x$\in[-\pi;\pi]$, $\sin(3x)+2\cos^2(x)+\sin(x)=0$.

1°) Factoriser $\sin(3x)+\sin(x)$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

3°) Si a + b + c = 180° alors prouver que :

a) $\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c=4\cos a\cos b\cos c$; b) $\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c=1+4\sin a\sin b\sin c$.

4°) Donner l'expression factorisée de

a) $A=\sin 5x+\sin 3x$; b) $B=\sin x-\sin 5x$; c) $C=\cos 4x-\cos 6x$

d) $D=\cos 9x+\cos 3x$; e) $E=\sin 4x-\sin 2x$; f) $F=\cos 11x+\cos 3x$

EXERCICE 6 :

Résoudre les équations suivantes

a°) x $\in\mathbb{R}$, $\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}$; b°) x$\in[-2\pi;2\pi]$, $\sin^2(2x)-4\sin(2x)+3=0$

c°) x $\in\mathbb{R}$, $-2\left(\sqrt{2}-1\right)\cos x-4\cos^2 x+\sqrt{2}=0$; d°) x$\in\mathbb{R}$, $\cos(5x)-\cos(x)=\sin(3x)$

e°) x$\in[-\pi;\pi]$, $2\sin^2(x)+(2-\sqrt{2})\sin(x)-\sqrt{2}=0$; f°) x$\in[-2\pi;2\pi]$, $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

g°) x $\in$ $[0\,;2\pi]$, $2\sin^2(x)+7\cos(x)-5=0$; h°) x$\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x-4\cos x+3=0$

i°) x$\in\mathbb{R}$, $2\cos(2x)\sin(x)=\sqrt{3}\,\sin(x)$; j°) x $\in\mathbb{R}$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin x$

k°) x$\in\mathbb{R}$, $-\sin x+\sqrt{3}\cos x-1=0$; l°) x$\in[0\,;2\pi]$, $\sqrt{2}+2(\sqrt{2}-1)\sin(x)=4\sin^2(x)$

m°) x$\in\mathbb{R}$, $2\sin(2x)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=2\sqrt{2}\,\sin(x)\cos(x)$; n°) x$\in\left[\frac{-\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$, $tg(2x)=\sqrt{3}$

p°) x$\in\mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos(x)-3\sin(x)=\sqrt{6}$; q°) x$\in\mathbb{R}$, $-\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)-\sqrt{2}=0$

r°) x$\in\mathbb{R}$, $2\cos x\sin x+4\sin(2x)=0$; s°) x$\in\mathbb{R}$, $\cos x+\sin x=-1$.

EXERCICE 7 :

1°) Établir la relation : $4\cos^4 x+4\sin^4 x=3+\cos(4x)$. Utiliser ce résultat pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4\cos^4 x+4\sin^4 x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

2°) résoudre les équations :

a) x$\in\mathbb{R}$, $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$; b) x$\in[0\,;2\pi]$, $2tg^2(x)-3tg(x)+1=0$;

c) x$\in\mathbb{R}$, $\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x=0$; d) x$\in\mathbb{R}$, $tg(3x)+tg(x)=0$

e) x$\in\mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos(3x)+\sin(3x)+1=0$; f) x$\in\mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

EXERCICE 8 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes

a) $\sin(2x)-\sqrt{3}\cos(x)=2$; b) $\sin(x)-\sqrt{3}\cos(x)=0$; c) $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{3}\cos(\pi x)+3\sin(\pi x)=0$; e) $\cos(3x)\cos(x)=\sin(3x)\sin(x)$

f) $\cos(2x)\cos(x)+\sin(2x)\sin(x)=\frac{1}{2}$; h) $2\sin(x)\cos(x)+2\sqrt{3}\cos(x)-\sqrt{3}\tan(x)+3=0$

g) $4\sin(x)\cos(x)+2\sin(x)-2\cos(x)-1=0$; i) $2\sin(x)\tan(x)-\tan(x)=1-2\sin(x)$

EXERCICE 9 :

Démontrer les identités suivantes

1°) $(\sin x+\cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x$; 2°) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$;

3°) $(\sin x-\cos x)^2 = 1 - 2\sin x\cos x$; 4°) $\tan(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)}$

5°) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 3$;

6°) $\dfrac{\sin x + \sin(5x)}{\cos x + \cos(5x)} = \tan(x)$; 7°) $\dfrac{\sin(3x)+\sin(7x)}{\cos(3x)-\cos(7x)} = \cot an(2x)$;

8°) $\dfrac{\sin x + \sin(3x) + \sin(5x)}{\cos x + \cos(3x) + \cos(5x)} = \tan(3x)$; 9°) $\dfrac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} = \tan(y)$

10°) $\dfrac{\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) + \sin(5x)}{\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) + \cos(5x)} = \tan(3x)$.

EXERCICE 10 :

Résoudre les inéquations suivantes :

1°) $x \in [0\,;\,2\pi[$, $\cos(2x) \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2°) $x \in [0\,;\,\pi[$, $tg(x) \ge \sqrt{3}$; 3°) $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) \ge \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

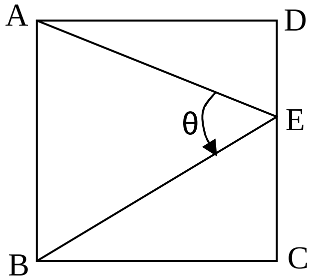
4°) $x \in \mathbb{R}$, $2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) \ge 1$; 5°) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) \ge 1$;

6°) $x \in \mathbb{R}$, $4\cos^2(x) - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos(x) + \sqrt{6} \le 0$.

7°) Factoriser $f(x)$ puis en déduire une résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$ dans les cas suivants : $f(x) = \sin 3x + \sin x + 2\sin 2x$; $f(x) = \cos 3x + \cos x + 2\cos 2x$

EXERCICE 11 :

1°) Soit ABCD un carré tel que 2EC = 3DE et mes(AÊB) = θ. Calculer tan(θ).



2°) Soient x , y et z trois nombres réels de $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z\right\}$ tels que $x+y+z=\pi$.

Démontrer les égalités suivantes :

a) $\cos x + \cos y + \cos z = 1 + 4\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{z}{2}$;

b) $\sin x + \sin y + \sin z = 4\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{y}{2}\cos\dfrac{z}{2}$;

c) $\tan(x) + \tan(y) + \tan(z) = \tan(x) \times \tan(y) \times \tan(z)$.