NOMBRES COMPLEXES - module et argument

$(O\ ;\ \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est un repère orthonormal du plan complexe.

Module et argument d'un nombre complexe

Exercice 1

1. Démontrer les propriétés du cours : si z et z ' sont deux nombres complexes non nuls, alors

$|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(z.z') = \arg z + \arg z'$

$|z^n| = |z|^n$ et $\arg z^n = n \arg z$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$

$|z + z'| \leq |z| + |z'|$

2. Montrer que $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$

Exercice 2

Déterminer par lecture graphique le module et un argument des nombres complexes :
2 ; -2i ; 2 + 2i ; - 2 + 2i

Exercice 3

Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants, puis les écrire sous forme trigonométrique :

$z_1 = -\sqrt{3} + i$; $z_2 = 5$; $z_3 = 4i$; $z_4 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$

Exercice 4

Calculer le module des nombres complexes suivants :

$z_1 = \left(\sqrt{6} + i\sqrt{3}\right)^6$; $z_2 = (1+2i)^3$; $z_3 = (\sqrt{6} + i)(4 + i\sqrt{3})$

$z_4 = \frac{17+i}{17-i}$; $z_5 = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1+i}\right)^4$

Exercice 5

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$1 - i\sqrt{3}$; -2 ; $\sqrt{3} + 3i$; $\frac{\sqrt{2}}{1-i}$; $\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$

Exercice 6

a) Déterminer les nombres complexes z tels que z , $\frac{1}{z}$, z – 1 aient même module.

b) Même question pour z , $\frac{1}{z}$, z + 1

Exercice 7

Sans déterminer les racines z′ et z′′ de l'équation : $2z^2 - 3z + 3 = 0$, calculer les modules de $z' + z''$, $z'.z''$, $\frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}$, z' et z''.

Exercice 8

Démontrer que si $|u| = 1$ alors $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ est réel.

Etudier la réciproque

Exercice 9

Soit f l'application de définie pour tout z différent de i et de − i par $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$.

1. Montrer que f(z) = f (z') si et seulement si z = z' ou zz'=1.
2. Soient z et z' deux nombres complexes tels que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$.
   Montrer que si f(z) = f(z') alors z = z'

Exercice 10

Soit f l'application de définie pour tout z différent de i et de − i par $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$.

1. Montrer que f(z) = f (z') si et seulement si z = z' ou zz'=1.
2. Soient z et z' deux nombres complexes tels que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$.
   Montrer que si f(z) = f(z') alors z = z'

Exercice 11

a) Comment choisir l'entier naturel n pour que $\left(\sqrt{3} + i\right)^n$ soit un réel positif ? un imaginaire pur ?

b) Soit $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$. Comment faut-il choisir l'entier relatif k pour que z^k soit imaginaire pur ?

Exercice 12

Démontrer que si x est réel, le nombre complexe $\frac{1 + xi}{1 - xi}$ a pour module 1.

Exercice 13

Déterminer le module et un argument de 1 + sin x − i cos x

Déterminer le module et un argument de $z = \frac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha}$ lorsque $\alpha \neq 0\ (2\pi)$

Exercice 14

Soient z , z′ et u des nombres complexes tels que u² = z z′.

Montrer que $|z| + |z'| = \left|\frac{z + z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z + z'}{2} - u\right|$

Notation exponentielle

Exercice 15

Placer les points d'affixes z_k dans le repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{e_1}, \vec{e_2})$

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $z_3 = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}$; $z_4 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 16

a) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z_2 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $z_3 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$; $z_4 = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

b) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

20 ; -7 ; 5i ; 3 – 3 i ; $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\left(\sqrt{3}+i\right)^4$; $\dfrac{4}{1+i}$

Exercice 17

On donne $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $z_3 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Donner la forme exponentielle puis la forme algébrique des complexes

$z_1z_2z_3$; $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$; ${z_2}^2$; ${z_3}^6$.

Exercice 18

Déterminer le module et un argument de $1+e^{ia}$; $e^{ia}-i$; $i+e^{ia}$, $a \in \mathbb{R}$.

Simplifier $\dfrac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$.

Exercice 19

1.- Quel est le conjugué de $x+e^{i\alpha}$, où x et α sont des réels ?

2.- Exprimer en fonction de $\tan\alpha$ les nombres $\dfrac{e^{2i\alpha}-1}{e^{2i\alpha}+1}$, $e^{4i\alpha}+2e^{2i\alpha}+1$

Exercice 20

Donner une expression simple de $C = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$

(On pourra calculer C + i S en posant $z = e^{ix}$)

Exercice 21

1- z est un nombre complexe et $z' = 1+z+z^2+z^3+z^4$

a) Donner une autre expression de z', lorsque $z \neq 1$.

b) Que vaut z' si $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

En déduire la valeur de $S=1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}$.

2 - Montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=4\cos^2\frac{\pi}{5}-2$ et que $\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}=-2\cos\frac{\pi}{5}$

3 - En déduire que $\cos\frac{\pi}{5}$ est solution d'une équation du second degré

4 - Résoudre cette équation et donner la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$

Exercice 22

x est nombre réel. Ecrire la forme algébrique et la forme exponentielle de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)e^{ix}$.

Utiliser la question précédente pour résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'équation
$\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{2}$

En déduire les valeurs exactes des $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$