Trigonométrie : formules trigonométriques

Exercice 1

1°) Rappeler les principaux formules trigonométriques :

$\cos(a+b) =$

$\cos(a-b) =$

$\sin(a+b) =$

$\sin(a-b) =$

$\tan(a+b) =$

$\tan(a-b) =$

2°) Redémontrer les propriétés donnant :

$\cos(-x)$; $\sin(-x)$

$\cos(\frac{\pi}{2}+x)$; $\sin(\frac{\pi}{2}+x)$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x)$; $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$

$\cos(\pi-x)$; $\sin(\pi-x)$

$\cos(x+\pi)$; $\sin(x+\pi)$

$\cos(x+2k\pi)$; $\sin(x+2k\pi)$ $(k \in Z)$

$\cos(x+(2k+1)\pi)$; $\sin(x+(2k+1)\pi)$ $(k \in Z)$

Exercice 2

1°) a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ seulement

b) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ seulement

2°) a) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ seulement

b) Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ seulement

Exercice 3

Démontrer les égalités suivantes :

$$(\sin(x)-\cos(x))^2 = 1-\sin(2x)$$

$$(\sin(x)-\cos(x))(1+\sin(x)\cos(x)) = \sin^3(x)-\cos^3(x)$$

$$\sin^4(x)-\cos^4(x) = 1-\cos^2(x)$$

$$\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$(\cos(x)+\sin(x))^2-(\cos(x)-\sin(x))^2 = 2\sin(2x)$$

Exercice 4

1°) Résoudre le système d'équations d'inconnu (a,b) suivante : $\begin{cases} a\dfrac{\pi}{3}+b\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12} \\ a\dfrac{\pi}{3}-b\dfrac{\pi}{12}=5\dfrac{\pi}{12} \end{cases}$

2°) Calculer alors $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$, $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$.

Exercice 5

1°) Donner une relation entre $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$

2°) a) Exprimer $\cos^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$

b) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$

Exercice 6

Soit $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ tel que $\cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

1°) a) Quel est le signe de $\sin(\theta)$?

b) Donner une relation entre $\cos^2(\theta)$ et $\sin^2(\theta)$

c) Trouver alors la valeur de $\sin(\theta)$

2°) a) Exprimer $\sin(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$

b) Calculer alors $\sin(2\theta)$

c) Trouver la valeur exacte de θ

Exercice 7

Soit x un nombre réel tel que $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ et $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Calculer $\cos(2x)$ et en déduire la valeur de x

Exercice 8

Soit deux nombres réels x et y éléments de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tels que :

$\sin(x)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\cos(y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1°) a) Vérifier que $\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

b) Calculer $\cos(x)$

c) Calculer $\sin(y)$; quelle est la valeur de y ?

2°) a) Calculer $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$

b) Calculer $\cos(x-y)$ et $\sin(x-y)$; en déduire la valeur de x

Exercice 9

Démontrer que dans un triangle ABC rectangle en A, $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 10

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.

2. Monter que f est une fonction constante

Exercice 11

Démontrer que les deux systèmes suivants sont équivalents :

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \sin x \,.\, \cos y = \dfrac{3}{4} \\ \cos x \,.\, \sin y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad (\mathrm{II}) \quad \begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 12

Résoudre le système :

$$\begin{cases} \cos x \,.\, \cos y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \sin x \,.\, \sin y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases}$$

Exercice 13

On définit un réel x par $\cos x = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

Calculer cos2x et en déduire x

Exercice 14

Démontrer les formules

a) $\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a} = \tan^2 \dfrac{a}{2}$

b) $\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a} = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{a}{2}\right)$

c) $\dfrac{1-\sin a}{\cos a} = \dfrac{\cos a}{1+\sin a} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{a}{2}\right)$

Exercice 15

On considère un triangle ABC, isocèle en A tel que BC = a, $\hat{B}$ mesure $\frac{2\pi}{5}$ rad. La bissectrice de l'angle $\hat{B}$ coupe [A, C] en D.

1.- Démontrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles. En déduire que DA = DB = a.

2.- Démontrer que. $AB = 2a\cos\frac{\pi}{5}$ et $CD = 2a\cos\frac{2\pi}{5}$

En déduire que $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$

3.- Démontrer que $BC = BD\cos\frac{\pi}{5} + CD\cos\frac{2\pi}{5}$

En déduire que $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$

4.- On pose $x = \cos\frac{\pi}{5}$ et $y = \cos\frac{2\pi}{5}$. En utilisant $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$, calculer x+y. En déduire x et y.

5.- Application :

Calculer les longueurs des côtés d'un pentagone régulier convexe et d'un décagone régulier convexe inscrits dans un cercle de rayon R. (On exprimera ces longueurs en fonction de R)