CC BY SA

Trigonométrie : étude de fonctions

Exercice 1

I- Vérifier que la fonction f définie par $f(x)=\cos(x)$ est périodique de période T à déterminer. Et la fonction g définie par $g(x)=\sin(x)$?

II- Soit h la fonction numérique définie par $h(x)=\cos(ax+b)$, a , $b\in IR$

1°) Vérifier que $h(x)=\cos(ax+b)=\cos(ax+b+T)$

2°) Trouver alors le plus petit réel positif T' tel que :

pour tout $x\in IR$ $h(x)=\cos(ax+b)=\cos\big(a(x+T')+b\big)=h(x+T')$

3°) Que dire de la fonction h ? Et la fonction t définie par $t(x)=\sin(ax+b)$? a , $b\in IR$

4°) Déterminer la période de chacune des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f(x)=\cos(3x)$; $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

$f(x)=\sin(6x-\frac{\pi}{3})$; $f(x)=\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$

$f(x)=\sin(\frac{x+3\pi}{4})$; $f(x)=\cos(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{4})$

$f(x)=\cos(\pi x-1)$; $f(x)=\sin(\frac{2\pi x-1}{3})$

III- 1°) Vérifier que la fonction k définie par $k(x)=\tan(x)$ est périodique de période π

2°) Montrer que la fonction p définie par $p(x)=\tan(ax+b)$ est périodique de période à déterminer. (a , $b\in IR$)

3°) Déterminer la période de chacune des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f(x)=\tan(3x-\frac{\pi}{3})$; $f(x)=\tan(2x+\frac{\pi}{4})$

$f(x)=\tan(\frac{x-\pi}{3})$; $f(x)=\cos(\frac{x+3}{\pi})$

Exercice 2

Exprimer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f(x)=\sin(x)$; $f(x)=\cos(x)$

$f(x)=\sin(3x-1)$; $f(x)=\cos(2x+3)$

$f(x)=\cos^2(x)$; $f(x)=\sin^2(x)$

cc BY SA

$f(x)=\cos^3(x)$; $f(x)=\sin^3(x)$

$f(x)=\cos^2(3x-1)$; $f(x)=\sin^3(x)\cos(x)$

$f(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$; $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

$f(x)=\tan(x)$; $f(x)=\cot an(x)$

Exercice 3

On définit la fonction f par $f(x)=\sin(x)$, et on note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) a) Préciser l'ensemble de définition Df de f

b) Vérifier que f est 2π –périodique

c) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de $De=[-\pi;\pi]$

2°) a) Exprimer $f'(x)$, fonction dérivée de f

b) Résoudre dans De l'inéquation $f'(x)\geq 0$

c) Dresser alors le tableau de signe de $f'(x)$ dans De tout en précisant se(s) point(s) d'annulation.

d) Dresser le tableau des variations de f dans De

3°) a) Préciser en quels points (C) coupe les axes du repère

c) Tracer (C) tout en précisant ses points maximum et/ou minimum

Exercice 4

On définit la fonction f par $f(x)=\cos(x)$, et on note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) a) Préciser l'ensemble de définition Df de f

b) Vérifier que f est 2π –périodique

c) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de $De=[-\pi;\pi]$

2°) a) Exprimer $f'(x)$, fonction dérivée de f

b) Résoudre dans De l'inéquation $f'(x)\leq 0$

c) Dresser alors le tableau de signe de $f'(x)$ dans De tout en précisant se(s) point(s) d'annulation.

d) Dresser le tableau des variations de f dans De

3°) a) Préciser en quels points (C) coupe les axes du repère

c) Tracer (C) tout en précisant ses points maximum et/ou minimum

CC BY SA

Exercice 5

On définit la fonction f par $f(x)=\sin(2x)$, et on note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) a) Préciser l'ensemble de définition Df de f

b) Montrer que f est périodique de période T à déterminer

c) Etudier la parité de f. Interpréter

d) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de $De=\left[0;\frac{T}{2}\right]$

2°) a) Exprimer $f'(x)$, fonction dérivée de f

b) Résoudre dans De l'inéquation $f'(x)\geq 0$

c) Dresser alors le tableau de signe de $f'(x)$ dans De tout en précisant se(s) point(s) d'annulation.

d) Dresser le tableau des variations de f dans De

3°) a) Préciser en quels points (C) coupe les axes du repère

c) Tracer (C) tout en précisant ses points maximum et/ou minimum

Exercice 6

On définit la fonction f par $f(x)=2\cos(x)-\cos(2x)$, et on note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) a) Préciser l'ensemble de définition Df de f

b) Vérifier que f est 2π –périodique

c) Etudier la parité de f. Interpréter.

c) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de $De=[0;\pi]$

2°) a) Montrer que pour tout $x\in IR$ $f'(x)=2\sin(x)(2\cos(x)-1)$

b) Résoudre dans De l'équation $f'(x)=0$

c) Résoudre dans De l'inéquation $\sin(x)\geq 0$ puis étudier dans De le signe de :

$\sin(x)$

d) Résoudre dans De l'inéquation $\cos(x)\geq\frac{1}{2}$ puis étudier dans De le signe de : $2\cos(x)-1$

e) Dresser alors le tableau des variations de f dans De

3°) a) Préciser en quels points (C) coupe les axes du repère

c) Tracer (C) tout en précisant ses points maximum et/ou minimum.

Exercice 7

On définit la fonction f par $f(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$, et on note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) a) Préciser l'ensemble de définition Df de f

b) Vérifier que f est 2π –périodique

c) Etudier la parité de f. Interpréter.

d) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de $De=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$. Interpréter

2°) a) Exprimer $f'(x)$, fonction dérivée de f

b) Dresser alors le tableau des variations de f dans De

3°) a) Montrer que pour tout $k\in Z$, la droite $(D_k): x=k\pi$ est un axe de symétrie de (C)

b) Montrer que pour tout $k\in Z$, le point $I_k(k\dfrac{\pi}{2};0)$ est un centre de symétrie de (C)

4°) Tracer (C) tout en précisant ses points maximum et/ou minimum

Exercice 8

On définit la fonction f par $f(x)=\tan(x)$, et on note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) a) Préciser l'ensemble de définition Df de f

b) Vérifier que f est π –périodique

c) Etudier la parité de f. Interpréter.

d) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de $De=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Interpréter

2°) a) Exprimer $f'(x)$, fonction dérivée de f

b) Dresser alors le tableau des variations de f dans De

3°) a) Montrer que pour tout $k\in Z$, le point $I_k(k\pi;0)$ est un centre de symétrie et un point d'inflexion de (C)

b) Donner l'équation de (T_k), tangente à (C) en I_k

4°) Tracer (C) tout en précisant ses points maximum et/ou minimum

CC BY SA

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\sqrt{3}\sin(x)+\cos(x)$, et de courbe représentative (C) dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) Montrer que h est 2π –périodique

2°) a) Trouver $\theta\in[0;2\pi[$ pour que l'équation $(E):h(x)=0$ soit équivalente à $\sin(x+\theta)=0$

b) Chercher alors, dans $D=[-\pi;\pi]$, les points d'intersection de (C) avec l'axe $(x'Ox):y=0$

3°) a) Exprimer $f'(x)$, fonction dérivée de f

b) Montrer que l'inéquation $(I):f'(x)\geq 0$ est équivalent à $\cos(x+\theta)\geq 0$

c) Résoudre dans D, l'inéquation (I) puis dresser le tableau des variations de f

4°) Faire la représentation graphique de f dans $R(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 10

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\sin(x)-\sqrt{3}\cos(x)$, et de courbe représentative (C) dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) Montrer que h est 2π –périodique

2°) a) Trouver la valeur de $\theta\in[-\pi;\pi[$ pour que l'équation $(E):h(x)=0$ soit équivalente à $\sin(x-\theta)=0$

b) Résoudre (E) dans $D=[-\pi;\pi]$

3°) a) Exprimer $f'(x)$, fonction dérivée de f

b) Montrer que l'inéquation $(I):f'(x)>0$ est équivalent à $\cos(x-\theta)>0$

c) Résoudre dans D, l'inéquation (I) puis dresser le tableau des variations de f

4°) Faire la représentation graphique de f dans $R(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 11

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$; ; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}$ d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{2x-\pi}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{\cos x-1}$. f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$ g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\pi-6x}$;

Exercice 12

Calculer f '(x) dans chacun des cas suivants :

f(x) = $\cos^3 x$; f(x) = $\sin^2 (3x). \cos x$; f(x)= $\sin^2 (3x)$; f(x) = $\sqrt{\cos x}$

f(x) = $\dfrac{1}{cosx}$; f(x)= $\dfrac{2}{\sin 2x}$; f(x) = $\dfrac{\cos x - 1}{\cos x + 1}$; f(x)= $\tan^2 \left(3x + \dfrac{\pi}{6} \right)$

Exercice 13

Etudier les variations et tracer la courbe de f :

a) f(x) = 1 - 8 cos x - 4 cos 2x b) $f(x) = \sin x + 2 \sin \dfrac{x}{2}$ c) $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{(\sin x - 1)^2}$