Limites d'une fonction : exercices

Exercice 1

I – On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+x-6}$

1°) Compléter le tableau suivant :

x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$f(x)$											

2°) Que dire de $f(x)$ lorsque x est voisin de 2 ?

II – On considère la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{x}$

1°) Compléter le tableau suivant :

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
$g(x)$									

2°) Que dire de $g(x)$ lorsque x est voisin de 0 ?

3°) Compléter le tableau suivant :

x	10	100	1000	10000
$g(x)$				

4°) Que dire de $g(x)$ lorsque x tend vers l'infini ?

III – On considère la fonction h définie par $h(x)=x^2-1$

1°) Compléter le tableau suivant :

x	10	100	1000	10000
$h(x)$				

2°) Que dire de $h(x)$ lorsque x tend vers l'infini ?

Exercice 2

Préciser les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^n}$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^n}\,(n\in IN)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^n}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^n}$ $(n\in IN)$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 21} 8$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x-7}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{9}}\sqrt{x}$

d) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} x^2$ e) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x+5}$ f) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\left(1-x+\dfrac{3}{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 1} x^3+3x^2-4x-5$ h) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+8x-12}{x+2}$ i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2+2x-1}{2x^2-3x-3}$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite (à gauche et/ou à droite) de f en a (et b)

a) $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$ avec $a=1$

b) $f(x)=\dfrac{-7}{2x+4}$ avec $a=-2$

c) $f(x)=\dfrac{-2}{x+1}$ avec $a=-1$

d) $f(x)=\dfrac{5}{5-x}$ avec $a=5$

(e) $f(x)=\dfrac{-1}{(x-1)(2x-1)}$ avec $a=1$ et $b=1/2$

(f) $f(x)=\dfrac{4}{6x^2-9x-6}$ avec $a=1/2$ et $b=2$

(g) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+5x+6}$ avec $a=-2$ et $b=-3$

(h) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-5}$ avec $a=5$

(i) $f(x)=\dfrac{x}{6-3x}$ avec $a=2$

(j) $f(x)=\dfrac{x^2}{7x-21}$ avec $a=3$

(k) $f(x)=\dfrac{3-x}{x+7}$ et $a=-7$

(l) $f(x)=\dfrac{2x+5}{2x^2+5x-6}$ avec $a=1/2$ et $b=-3$

(m) $f(x)=\dfrac{3x-7}{3x^2+8x-16}$ avec $a=-4$ et $b=4/3$

(n) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{3x+6}$ avec $a=-2$

(o) $f(x)=\dfrac{4x^2+2x-7}{2x^2-x-3}$ avec $a=-1$ et $b=3/2$

(p) $f(x)=\dfrac{8x^3-4}{4x^2-4x+1}$ avec $a=1/2$

q) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-7}{x^3+5x^2+7x+3}$ avec $a=-1$ et $b=-3$

(r) $f(x)=\dfrac{4x^2+4x-3}{2x^3+x^2+2x+1}$ avec $a=-1/2$

Exercice 5

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2-3x-4}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+2x-3}$

e) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3+x^2+x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^2-4}$

h) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$

i) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{7+13x-2x^2}{x-7}$

j) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x^3}{x^3+x^2+4x+4}$

k) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x+2}$

l) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-8x+16}$

m) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-2x^2-5x+3}{2x^3+11x^2+12x-9}$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite (à gauche et/ou à droite) de f en a et en b .

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{3x^2+x}$ pour $a=-1/3$ et $b=0$

(2) $f(x)=\dfrac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-4)}$ pour $a=-2$ et $b=4$

(3) $f(x)=\dfrac{x+2}{3x^2+2x-8}$ pour $a=-2$ et $b=4/3$

(4) $f(x)=\dfrac{4x^3+1}{2x^2-5x-3}$ pour $a=3$ et $b=-1/2$

(5) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^3(x+7)}$ pour $a=-7$ et $b=0$

(6) $f(x)=\dfrac{-x^3+2x+1}{-2x^2+11x-5}$ pour $a=5$ et $b=-1/2$

Exercice 7

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ dans chacun des cas suivants :

(1) $f(x)=x^2+x+3$

(2) $f(x)=-2x^2+3x-4$

(3) $f(x)=x^3+x-5$

(4) $f(x)=2x-3$

(5) $f(x)=6x^2-7x-20$

(6) $f(x)=11x^5-16x^3-3x^2+12x+55$

(7) $f(x)=-6x^4+68x^3+14x^2-7x$

(8) $f(x)=3x^5+36x^3+25x^2+25$

(9) $f(x)=6x^{39}+7x^{135}-5x^{122}$

(10) $f(x)=11x^{361}-21x^{398}-32x^{21}+421x-1$

(11) $f(x)=x^n+2x-3$ $(n>2)$

(12) $f(x)=x^n+3x^{n-1}+x-2$ $(n>2)$ $(n\in IN)$

Exercice 8

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ dans chacun des cas suivants :

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

(2) $f(x)=\dfrac{x+6}{x^2-35}$

(3) $f(x)=\dfrac{8-x}{3x+2}$

(4) $f(x)=\dfrac{3x^3-7}{2x^2-8x+5}$

(5) $f(x)=\dfrac{x^4+5x^2-1}{-3x^2+x+2}$

(6) $f(x)=\dfrac{-2x+3}{5x^3-x+7}$

(7) $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{8x+2}$

(8) $f(x)=\dfrac{-5x^3+4x-7}{-2x^3+3x+1}$

(9) $f(x)=\dfrac{-x^4+3x^2-1}{x+1}$

(10) $f(x)=\dfrac{4x}{5x^4-2}$

(11) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-x-6}$

(12) $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-2)}{-x^2+4x+4}$

(13) $f(x)=\dfrac{8-x}{2x-2}$

(14) $f(x)=\dfrac{3x^2-3x-1}{8x+2}$

(15) $f(x)=\dfrac{3x^2-3x-1}{-8x^3+3x^2-2}$

(16) $f(x)=\dfrac{3x^3-3x^7-1}{8x^2+2x-x^6}$

(17) $f(x)=\dfrac{x^{2n}-3x-1}{8x^n+2x^2+2}$ $(n>2)$

(18) $f(x)=\dfrac{x^{n-1}-3x-1}{8x^n+2x^8+2}$ $(n>8)$ (NB : $n\in IN$)

Exercice 9

Soit l'équation paramétrique $(E_m) : 2(m-1)x^2-(3m-1)x+m=0$

I – 1°) Résoudre l'équation pour $m=1$

2°) Résoudre l'équation pour $m\neq 1$

Calculer les limites des solutions quant m tend vers 1

II – 1°) Résoudre l'équation pour $m=-1$

2°) Calculer les limites des solutions de (E_m) quand m tend vers -1

Exercice 10

1°) Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{(x+3)(x-2)}{|x-2|}$

f admet-t-elle une limite en -3 ? en 2 ?

2°) Soit g la fonction numérique définie par $g(x)=x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

f admet-t-elle une limite en 0 ?

Exercice 11

On définit f par $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^3-x^2-x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}$

1°) Préciser l'ensemble de définition Df de f

2°) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de Df

Exercice 12

On définit f par $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{4x^4-2x^2+\frac{1}{4}}-\dfrac{2x}{2x-1}+1$

1°) Préciser l'ensemble de définition Df de f

2°) Etudier les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$

3°) Etudier la limite de $f(x)$ en $-\dfrac{1}{2}$

4°) Etudier la limite de $f(x)$ en $\dfrac{1}{2}$

Exercice 13

Soit g la fonction numérique définie par $g(x)=\dfrac{2x^2+3x+4}{x+1}$

1°) Trouver les trois réels a , b et c tels que pour tout $x\neq -1$, $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

2°) Etudier les positions de la courbe $(C): y=g(x)$ par rapport à la droite $(D): y=ax+b$

3°) Trouver I , point d'intersection de (D) avec la droite $(\Delta): x=-1$

4°) Montrer que I est un centre de symétrie pour (C)

5°) Calculer les limites suivantes :

$A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ et $B=\lim\limits_{x\to\infty}\left(g(x)-A\cdot x\right)$

Exercice 14

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{x^2-x-4}{x^2-2x-3}$

1°) Pour quelles valeurs x_1 et x_2 de x , f n'est-t-elle pas définie ?

2°) Trouver les trois réels a , b et c tels que $f(x)=a+\dfrac{b}{x-x_1}+\dfrac{c}{x-x_2}$

3°) Etudier alors les limites de $f(x)$ en $-\infty$, $+\infty$, x_1 et x_2

4°) Trouver I , point de la courbe $(C): y=f(x)$ d'abscisse $\dfrac{x_1+x_2}{2}$

5°) Montrer que I est un centre de symétrie pour (C)