Optimisation

Exercice 1

Soit C la courbe d'équation $y = x^2 - 1$, et soit M(x,y) un point de la courbe C.

1.- Exprimer en fonction de x la distance D(x) de M à l'origine O du repère.

2.- En étudiant les variations de la fonction D, déterminer les coordonnées des points de C les plus proches de O.

Exercice 2

Un stade de football peut accueillir 30 000 personnes. On a constaté que le nombre N de spectateurs était fonction du prix x du billet d'entrée : N = 30 000 – 375x.

Déterminer quel doit être le prix d'entrée pour avoir une recette maximale.

Préciser le nombre de spectateurs et la recette totale.

Exercice 3

Une entreprise fabrique chaque jour x objets. Le coût de fabrication de ces x objets exprimé en francs, est donné par $f(x) = x^2 - 20x + 200$. (On admet que $0 \leq x \leq 45$)

1.- Calculer le coût de fabrication de 40 objets.

2.- Le prix de vente d'un objet est de 34 F. Soit g(x) le bénéfice réalisé pour x objets vendus.

a) Calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise pour 40 objets vendus.

b) Montrer que $g(x) = -x^2 + 54x - 200$.

c) Calculer g'(x), étudier son signe et dresser son tableau de variation. (On ne demande pas de construire la courbe de f).

En déduire la valeur de x pour laquelle l'entreprise réalise le bénéfice maximal.

Exercice 4

On dispose d'une feuille de carton rectangulaire, de 80 cm de long et de 50 cm de large, avec laquelle on veut fabriquer une boîte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle.

Pour cela, on découpe dans la feuille quatre carrés égaux de côté x aux quatre coins (figure 1), puis on plie le carton suivant les segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. On obtient alors la boîte (figure 2).

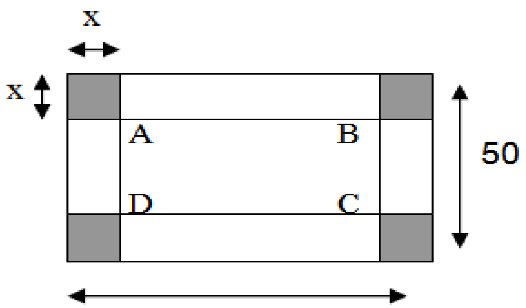

fig.1

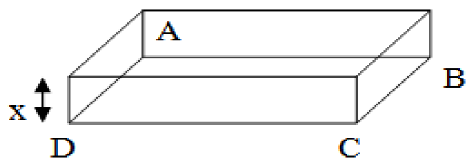

fig.2

1.- Préciser dans quel intervalle I peut varier x pour que la boîte soit réalisable.

2.- Montrer que le volume de la boîte (en cm^3) s'écrit en fonction de x :

$$V(x)=4x^3-260x^2+4\ 000x\ .$$

3.- Etudier les variations de V sur l'intervalle [0 ; 25] et en déduire la valeur de x pour laquelle le volume V est maximal. Quel est alors le volume de la boîte obtenue ?

Exercice 5

ABC est un triangle équilatéral de côté 10 cm. On considère un rectangle MNPQ où M et N sont sur le segment [BC], P sur le segment [AC] et Q sur le segment [AB]. On pose BM = x .

Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle MNPQ est maximale.

Préciser les dimensions du rectangle dans ce cas.

Exercice 6

On veut former un carré et un cercle avec une ficelle de longueur l = 1 m.

A quel endroit doit-on couper pour que la somme des aires des deux domaines soit maximale ?