Fonctions dérivées

1. Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On appelle fonction dérivée de f (ou dérivée de f) sur I la fonction notée f', qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x.

$$f': x \mapsto f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2. Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
$a \ (\in R)$	0
x	1
x^2	$2x$
$x^n \quad (n \in IN^*)$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration

- Soit $f(x) = a$ quel que soit $x \in R$.

f est constante $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a-a}{h} = 0$

donc $f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$

- Soit $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

- Soit $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(x+h)^2-(x^2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} 2x+h = 2x$$

- Si $f(x) = x^n$

$$f'(x)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\left[C_n^0x^nh^0+\cdots+C_n^{n-1}xh^{n-1}+C_n^nh^n-x^n\right]$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\left[C_n^1x^{n-1}h+\cdots+C_n^nh^n\right]=\lim_{h\to0^+}(C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}h+\cdots+C_n^nh^{n-1})$$

$$=C_n^1x^{n-1}=x^{n-1}$$

- Soit $f(x)=\frac{1}{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{a}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

- Soit $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exemple : Calculer le nombre dérivé de $f:x\to x^3$ en 2.

$$f(x)=x^3, f'(x)=3x^2, f'(2)=12$$

3. Opérations sur les fonctions dérivées

Théorème

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I alors $u+v$, $u\cdot v$ et λu $(\lambda\in R)$ sont dérivables sur I. Si de

plus, v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I.

Et on a :

$$(u+v)'=u'+v'$$
$$(u\cdot v)'=vu'+u'v$$
$$(\lambda u)'=\lambda\cdot u'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

En particulier $\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}$

Si u est dérivable et strictement positive sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable et $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Démonstration

- u et v sont dérivables sur I, donc quel que soit $x_0 \in I$, $\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$ et $\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}$ sont finies

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(u+v)(x)-(u+v)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)-u(x_0)-v(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}+\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}u'(x_0)+v'(x_0)$$

D'où

$$(u+v)'(x_0)=u'(x_0)+v'(x_0)$$
$$(u+v)'=u'+v'$$

- $$\lim_{x\to x_0}\frac{(u.v)(x)-(u.v)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x).v(x)-u(x)v(x_0)+u(x)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)[v(x)-v(x_0)]+v(x_0)[u(x)-u(x_0)]}{x-x_0}\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[u(x)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right]+\lim_{x\to x_0}\left[v(x_0)\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\right]$$

Puisque u et v sont dérivables, elles sont continues en x_0.

Donc $\lim_{x\to x_0}u(x)=u(x_0)$ et $\lim_{x\to x_0}v(x)=v(x_0)$

D'où $(uv)'(x_0)=u'(x_0).v(x_0)+u(x_0).v'(x_0)$.

- Si v est constante, $v(x)=\lambda$ quel que soit x,

$$(u.v)'=(\lambda u)'=\lambda'u+\lambda u$$
$$\text{or}\quad \lambda'=0$$
$$(\lambda u)'=\lambda.u'$$

- Si f(x) = $\dfrac{1}{u(x)}$,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{u}(x)-\frac{1}{u}(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{u(x)}-\frac{1}{u(x_0)}}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x_0)-u(x)}{x-x_0}\times\frac{1}{u(x).u(x_0)}$$
$$=\frac{-u'(x_0)}{\left[u(x_0)\right]^2}$$

d'ou $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

- $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\left(u\times\dfrac{1}{v}\right)'=u'\left(\dfrac{1}{v}\right)+\left(\dfrac{1}{v}\right)'u=\left(u'\times\dfrac{1}{v}\right)+\left(\dfrac{-v'}{v^2}\times u\right)=\dfrac{u'\times v-v'\times u}{v^2}=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

- Soit f(x)= $\sqrt{u(x)}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{u(x)}-\sqrt{u(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{(x-x_0)(\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x_0)})}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\times\frac{1}{\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x_0)}}\right]$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\times\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x_0)}}$$
$$=u'(x_0).\frac{1}{2\sqrt{u(x_0)}}$$

Conséquences

- Si u est dérivable, u² est dérivable et $(u^2)'=2uu'$

  Plus généralement, $u^n(n\in\mathbb{N})$ est dérivable et $(u^n)'=n.u^{n-1}u'$
- Toute fonction polynôme est dérivable sur IR.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.

Exercices

a) u est une fonction dérivable sur I, et telle que $u(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$

Montrer que $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N}^*$

b) Soit $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, avec $ad-bc\neq 0$. Montrer que $f'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$

Réponses

a) $u(x) \neq 0$

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-n.u^{n-1}.u'}{(u^n)^2} = \frac{-n.u^{n-1}.u'}{u^{2n}} = \frac{-nu'}{u^{2n}.u^{-n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$$

b) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

$$f'(x) = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

$$f'(x) = \frac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

Théorème

Quel que soit $n \in \mathbb{Z}^*$, $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$ si u est une fonction dérivable.

4. Dérivée seconde d'une fonction

Si f est dérivable sur I et sa dérivée f ' est, elle aussi dérivable sur I, on dit que f est 2 fois dérivable sur I et la dérivée de f ', notée f'', est appelée dérivée seconde de f.

Exemple :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 1$$

f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 7$$

f ' est une fonction polynôme donc dérivable sur IR.

$$f''(x) = 12x - 6$$

Plus généralement, si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on définit la dérivée n^e par la dérivée de la dérivée $(n-1)^e$ de f. On la note $f^{(n)}$.

Ainsi $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

La dérivée $3^è$ de f est la dérivée de la dérivée seconde.

La dérivée 10^e de f est la dérivée de la dérivée 9^e de f.