Équations - Inéquations ps

1. Équation du second degré dans IR

1.1 Trinôme du second degré

Un trinôme du second degré est une expression de la forme f(x) = ax² + bx + c où a,b et c sont des réels et $a \neq 0$

Soit ,f(x) = ax² + bx + c on dit que α est une racine de f(x) si f (α) = 0.

Factoriser f(x) c'est l'écrire, lorsque cela est possible, sous forme de produit de facteur du premier degré, c'est à dire sous la forme

f(x) = a(x – x')(x - x'').

On a alors f(x) = 0 si a(x – x')(x – x'') = 0.

Factoriser un trinôme revient donc à chercher les racines de ce trinôme, c'est à dire les solutions de f(x) = 0.

1.2 Équation du second degré dans IR

Une équation de degré 2, d'inconnue *x*, sous forme développée,

s'écrit a*x*² + b*x*+ c = 0, où a, b et c sont des nombres connus avec a≠0

Résoudre dans IR une équation d'inconnue x, c'est trouver les solutions réelles, c'est-à-dire les valeurs des réels x qui rendent l'égalité correcte.

Exemple: 3x² - 2x- 5 = 0 est une équation de degré 2.

- En remplaçant x par 1 dans 3 x² - 2x - 5, on obtient - 4.Le nombre 1 ne rend pas l'égalité correcte. Donc 1 n'est pas une solution de l'équation 3*x*² - 2*x* - 5 = 0
- **T**andis que, en remplaçant *x* par - 1 dans 3*x*² - 2*x* - 5, on obtient 0.

Le nombre - 1 rend l'égalité correcte.
Donc - 1 est une solution de l'équation 3*x*² - 2*x*- 5 = 0

1.3 Résolution

Pour résoudre dans IR a*x*²+ b*x* + c = 0 avec a≠0

On calcule le discriminant b² - 4ac, noté souvent Δ, puis il suffit de regarder le signe de Δ et de connaître le tableau suivant pour pouvoir conclure :

	$\Delta = b^2 - 4ac$	
si $\Delta < 0$ (son signe est -) on peut conclure : l'équation n'a aucune solution réelle. S = $\emptyset$	si $\Delta = 0$ on peut conclure : l'équation a une solution unique réelle calcul de cette solution : x' = x'' = $\frac{-b}{2a}$ S = { $\frac{-b}{2a}$ }	si $\Delta > 0$ (son signe est +) on peut conclure : l'équation a deux solutions réelles. calcul de ces solutions: Δ=($\sqrt{(\Delta)}$ ² x' = $\frac{-b-\sqrt{(\Delta)}}{2a}$ x'' = $\frac{-b+\sqrt{(\Delta)}}{2a}$

Exemples

Résoudre dans IR les équations suivantes:

a) $2x^2 - 3x + 5 = 0$;   b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; c) $4x^2 - 3x - 10 = 0$.

Réponses:

a) $2x^2 - 3x + 5 = 0$.

On a a = 2 , b = - 3, c = 5

$\Delta = b^2 - 4\,ac$

$= 9 - 40$

$= -31$

comme le discriminant est strictement négatif , l'équation est impossible.

L'ensemble des solutions est : S = $\emptyset$

b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

ici, a = 4, b = 4, c = 1

$\Delta = b^2 - 4\,ac$

$= 4^2 - 4(4)(1)$

$= 0$

Le discriminant est nul , x' = x'' = $\frac{-b}{2a}$. on trouve x' = x'' = $\frac{-1}{2}$

L'ensemble des solutions est : S = { $\frac{-1}{2}$ }

c) $4x^2 - 3x - 10 = 0$.

Ici a = 4, b = - 3, c= - 10

On a : $\Delta = b^2 - 4ac$

= (-3)² – 4 (4)(-10)

= 169

Le discriminant est strictement positif, nous avons deux solutions distinctes x' et x''

x' = $\frac{-b-\sqrt{(\Delta)}}{2a}$ et x'' = $\frac{-b+\sqrt{(\Delta)}}{2a}$; on trouve x' = $\frac{5}{4}$ et x'' = 2.

L'ensemble des solutions est : S = { $\frac{5}{4}$, 2 }

2. Inéquation du second degré dans IR

2.1 transformation d'écriture de ax² + bx + c

Soit à factoriser f(x) = ax² + bx + c où $a \neq 0$

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}x\right) + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Posons Δ = b²-4ac, Δ est appelé discriminant du trinôme.

$$f(x) = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

2.2 Factorisation

il y a trois cas à distinguer :

Si Δ < 0 (son signe est -)	si Δ = 0	si Δ >0
on ne peut pas factoriser f(x)	f(x) = a(x+ $\frac{b}{2a}$)²	f(x) = a(x – x')(x – x'') avec x' = $\frac{-b-\sqrt{(\Delta)}}{2a}$ et x'' = $\frac{-b+\sqrt{(\Delta)}}{2a}$

2.3 signe de ax² + bx +c

d'après la factorisation de f(x) = ax² + bx + c, on a le résultat suivant :

Si $\Delta < 0$ (son signe est -)	si $\Delta = 0$	si $\Delta > 0$
f(x) a même signe que a	$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ f(x) a même signe que a et s'annule pour $x = \frac{-b}{2a}$	$f(x) = a(x - x')(x - x'')$ f(x) a même signe que a à l'extérieur des racines et du signe de (-a) à l'intérieur.

Parfois on regroupe le signe de f(x) dans un tableau appelé tableau de signe ,donc :

- Si $\Delta < 0$ le tableau de signe de f(x) a la forme suivante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	

- Si $\Delta = 0$ le tableau de signe de f(x) a la forme suivante.

x	$-\infty$		x'		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$ le tableau de signe de f(x) a la forme suivante.

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
x-x'		-	0	+		+	
x-x''		-		-	0	+	
(x-x')(x-x'')		+	0	-	0	+	

$a(x-x')(x-x'')$	signe de a	0	signe de (-a)	0	signe de a

2.4 Inéquations du second degré dans IR

Une inéquation du second degré à une inconnue dans IR est une inéquation de l'une des formes

$ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$

où a, b, c sont des réels donnés, avec $a \neq 0$.

Pour résoudre une telle inéquation :

- ➔ on dresse le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$.
- ➔ On hachure les colonnes avec les signes inutiles.
- ➔ On écrit la solution sous forme de réunion d'intervalles

Exemples

Résoudre dans IR les inéquations suivantes

a) $x^2 + x + 1 < 0$ b) $-3x^2 + x + 2 \geq 0$;

Réponse

étape 1 : calcul du discriminant

étape 2: dresser le tableau de signe

étape 3 : hachurer les colonnes avec les signes inutiles

étape 4 : écrire les solutions

3. Fonction symétrique des racines

On considère le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$). Dans le cas où $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes x' et x''.

$f(x) = a(x-x')(x-x'') = a(x^2 - (x'+x'')x + x'x'') = ax^2 - a(x' + x'')x + ax'x''$.

par identification, on obtient $-a(x' + x'') = b$ et $ax'x'' = c$ d'où la formule :

$S = x' + x'' = \dfrac{-b}{a}$ et $P = x'x'' = \dfrac{c}{a}$

réciproquement, si on connaît la somme et le produit de deux nombres, ces nombres sont les solutions d'une équation du second degré.C'est à dire si $x + y = S$ et $xy = P$, x et y sont les solutions de l'équation

$u^2 - su + P = 0$

Exemples

1) Résoudre dans IR

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases} \qquad (1)$$

Si x et y existent, ils sont les racines de l'équation $u^2 - u - 6 = 0$.

Les racines de cette équation du second degré sont : $u_1 = 3$ et $u_2 = -2$.

D'où, les solutions de (1) sont : x = 3 et y = -2, ou x = -2 et y = 3. L'ensemble des solutions est:

S = { (3 ; - 2), (- 2 ; 3) }

2) Une table rectangulaire a pour surface s = 6 m², et pour périmètre P = 10 m. Quelles sont les dimensions de cette table ?

Si L et l sont les dimensions de cette table, L.l = 6 et 2(L + l) = P. On a à résoudre :

$$\begin{cases} L + l = \frac{P}{2} \\ L.l = s \end{cases} \quad \text{c'est à dire} \quad \begin{cases} L + l = 5 \\ L.l = 6 \end{cases}$$

L et l sont les solutions de l'équation : $u^2 - 5u + 6 = 0$. 0n peut vérifier que L = 3 m et l = 2 m.