Limite d'une fonction

1. Limite en un point :

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, f une fonction définie sur I sauf peut être en x_0 et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet l comme limite en x_0, ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0, si, lorsque x prend des valeurs très proches de x0, les nombres $f(x)$ deviennent très proches de l (ils finissent par appartenir à l'intervalle $]l-\alpha\,;\,l+\alpha[$, aussi petit que soit le réel positif α)

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *ou* $\lim\limits_{x_0} f = l$

On dit que la limite de f en x_0 est $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si lorsqu'on donne à x des valeurs de plus en plus proches de x_0, $f(x)$ prend des valeurs indéfiniment grandes. (f(x) peut être plus grand que n'importe quel nombre M, aussi grand soit-il, pourvu que x soit assez proche de x_0)

<u>Exemple :</u> $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

x	10^{-1}	10^{-2}	10^{-10}	10^{-100}
$f(x)$	10	100	10^{10}	10^{100}

Quand x prend des valeurs très proches de 0, f(x) devient indéfiniment grande donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

On dit que la limite de f en x_0 est $-\infty$ si $\lim\limits_{x_0} -f(x) = +\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

2. Limite à l'infini :

On dit que f a pour limite *l* en $+\infty$ si lorsqu'on donne à x des valeurs de plus en plus grandes, f(x) devient très proche de *l* .

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

<u>Exemple :</u> $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

On dit que f est pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ devient indéfiniment grand

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} (-f(x)) = +\infty$

3. Fonctions de référence :

- $f(x)=x$
  $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=x_0$ quel que soit le réel x_0.

- $f(x)=a \quad (a\in R)$
  $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ quel que soit le réel x_0.

- $f(x)=\frac{1}{x}$
  $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

  $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$
  $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

4. Limite à gauche – limite à droite :

Soit une fonction définie sur $]x_0, x_0+\alpha[$ $\alpha\in R_+^*$; on dit que l est la limite de f à droite en x_0 si l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs supérieurs, c'est-à-dire quand x tend vers x_0 et $x > x_0$.

On écrit l= $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$

Si f est définie sur $]x_0-\alpha;x_0[$, on dit que l est la limite de f à gauche de x_0 si l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs inférieurs, c'est-à-dire quand x tend vers x_0 et $x < x_0$.

On écrit l= $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$

Exemple : $f(x)=\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$
$\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

5. Opérations sur les limites

- **Limite d'une somme :**

lim f	lim g	lim (f+g)
l	l'	l+l'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée
l	∞	∞

- **Limite d'un produit :**

lim f	lim g	lim (f.g)
l	l'	l.l'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$l\neq 0$	∞	∞
0	∞	Forme indéterminée

- **Limite d'un quotient :**

lim f	lim g	lim (f/g)
l	$l'\neq 0$	l/l'
∞	∞	Forme indéterminée
l	∞	0
0	0	Forme indéterminée
$l>0$	0^+	$+\infty$
$l>0$	0^-	$-\infty$
∞	0	∞

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=\frac{1^2+1}{1}=2$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+x\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{x+1}{x^2-x-2}\right)=-\infty$

Remarque

Lorsque la limite d'une fonction est de la forme $\frac{l}{0}$ où $l\neq 0$, alors le résultat est ∞. Pour savoir si c'est $+\infty$ ou $-\infty$, on étudie le signe du dénominateur.

Exemple : $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{x-1}\right)=-\infty$

- **Limite d'une fonction irrationnelle :**

Si $f(x)\geq 0$ dans un intervalle ouvert contenant x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=+\infty$