Limite d'une fonction : les formes indéterminées

1. Limite d'un polynôme

La limite d'une fonction polynôme quand x tend vers l'infini, est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

Exemple

$$f(x)=x^2-x+1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left[1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$$

2. Limite d'une fonction rationnelle

La limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur (quand x tend vers l'infini)

Exemple

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x^3-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^3-1}=\frac{+\infty}{+\infty}=F.I$$

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(2+\frac{1}{x^2})}{x^3(1-\frac{1}{x^3})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

Si la limite d'une fonction rationnelle en x_0 est de la forme $\frac{0}{0}$, on met $x-x_0$ en facteur et on simplifie

Exemple

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{0}{0}=F.I$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

3. Limite d'une fonction irrationnelle

Si la limite d'une fonction irrationnelle est de la forme $\frac{0}{0}$ $ou +\infty-\infty$, on lève l'indétermination en utilisant l'expression conjuguée..
Si elle est de la forme $\frac{\infty}{\infty}$, on met les termes de plus hauts degrés en facteur

Exemples :

- $f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-(+\infty) \text{ F.I}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{(x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0^-$$

- $f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$