Fonction exponentielle népérienne

1. Définition

La fonction logarithme népérien est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$, donc elle admet une réciproque.

Cette réciproque de la fonction ln est appelée exponentielle népérienne. On va la noter provisoirement exp.

On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} y = \exp x \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \text{si et seulement si} \quad \left\{\begin{array}{l} x = \ln y \\ y > 0 \end{array}\right.$$

2. Conséquences de la définition

- Quel que soit le réel x, exp x > 0
- les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre, alors

  ln(exp x)= x   quel que soit le réel x

  exp (ln x) = x quel que soit le réel x > 0

- La fonction ln est dérivable, et sa dérivée $f': x \mapsto f'(x) = \frac{1}{x}$ ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$

  donc la fonction exponentielle est dérivable sur $]-\infty;+\infty[$

- La fonction ln est strictement croissante, donc la fonction exp est aussi strictement croissante.

  ²Alors :

  - x = y si et seulement si exp(x)= exp(y)
  - x > y si et seulement si exp(x) > exp(y)

3. Propriétés algébriques

- exp(a+b) = (exp a) .(exp b)

Démonstration

On rappelle que ln x = ln y si et seulement si x = y, ln(exp(x))= x et ln (.b) = ln a +lnb

Donc, ln (exp(a+b) = a+b.

Et ln ((exp(a).(exp(b)) = ln(exp(a) + ln (exp(b)) = a + b

d'où l'égalité.

- Exp 0 = 1

ln(1) = 0 d'où le résultat.

- exp(1)= e

ln e = 1, d'où le résultat.

- $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$

exp(a-a)= 0.

Or exp(a-a)= exp(a+(-a))

= (exp(a))(exp(-a))

donc $\exp(-a)=\dfrac{\exp(a-a)}{\exp(a)}$

- $\exp(a-b)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

exp(a-b) = exp(a+ (-b))
= exp(a). exp(-b)

Or $\exp(-b)=\dfrac{1}{\exp(b)}$

d'où $\exp(a-b)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

- $(\exp(a))^n = \exp(na)$

$\ln(\exp(a))^n = n\ln(\exp(a)) = na$ et $\ln(\exp(na)) = na$.
D'où l'égalité.

4. Notation e^x

On sait que $\ln(e^r) = r$ pour tout rationnel r, et ln (exp r) = r.

Donc pour tout rationnel r, $\exp(r) = e^r$.

En admettant que cette égalité soit vraie pour tout réel x, on a $\exp(x)= e^x$ pour tout réel x.

Avec cette nouvelle notation, les propriétés précédentes s'écrivent :

- e^x est défini quel que soit le réel x
- $e^x > 0$, pour tout réel x
- $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x
- $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$
- $e^x = e^y$ si et seulement si $x = y$
- $e^x > e^y$ si et seulement si $x > y$
- $e^{a+b} = e^a . E^b$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^b = e^{ab}$

5. Limites

Considérons la fonction h définie par $h(x)= \ln x - x$

h est définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, $h'(x)= \dfrac{1}{x}-1$

$h'(x)= \dfrac{1-x}{x}$

h est donc strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$, et comme $h(1) = -1$, on a $h(x) < -1$ pour tout $x > 1$.

Alors $\ln x - x < -1 < 0$ pour tout $x > 1$.

Ainsi ln x < x pour tout x > 1.

On a alors, exp (lnx) < exp (x) ou $x < e^x$, pour tout x > 1

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Posons u = -x. Alors $e^x = e^{-u} = \dfrac{1}{e^u}$ et quand $x \to -\infty$, $u \to +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{1}{e^u}$

Comme $\lim\limits_{u \to +\infty} e^u = +\infty$, $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{1}{e^u} = 0$

Ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

6. Dérivée et primitives

On a montré que la fonction exponentielle est dérivable sur IR.

On rappelle que ln[exp (x)] = ln (e^x) = x.

Posons u(x) = ln[exp (x)] = ln (e^x) et v(x) = x

u est la composée des deux fonctions dérivables ln et exp, donc dérivable, et $u'(x) = \dfrac{\exp'(x)}{\exp(x)}$

v est dérivable et v'(x) = 1.

Comme u = v, u'(x)= v'(x), ainsi $\dfrac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$. D'où exp'(x)= exp(x)

Ainsi, si f(x) = e^x, alors f'(x) = e^x.

Soit g une fonction dérivable, et h(x)= f(g(x)) = (fog)(x) = $e^{g(x)}$

f et g sont dérivables, donc leur composée fog = h est aussi dérivable.

Et h'(x)= f'(g(x)). g'(x).

h'(x)= $e^{g(x)}$.g'(x).

Ainsi si f(x)= $e^{u(x)}$ alors f'(x)= u'(x). $e^{u(x)}$.

Exemples

- Soit f la fonction définie par f(x)= e^{2x^2+3x-1}

  Posons u(x)= $2x^2+3x-1$, u'(x)= 4x+3

  Alors f'(x)= (4x+3). e^{2x^2+3x-1} .

- Si f(x)= $e^{\frac{1}{x}}$, f'(x) = $-\dfrac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}$.

Conséquences

Si $f(x) = e^{x}$, alors les primitives de f sont les fonctions F définies par $F(x) = e^{x} + k$, où k est une constante arbitraire.

Si $f(x) = u'(x).e^{u'x)}$, alors les primitives de f sont les fonctions F définies par $F(x) = e^{u(x)} + K$.

Cas particulier : si $f(x)= e^{ax+b}$, avec a $a \neq 0$, alors $F(x) = \frac{1}{a}.e^{ax+b} + K$

Exemples

- $f(x) = e^{-2x+3}$, $F(x) = -\frac{1}{2}.e^{-2x+3} + K$
- $f(x)= (2x -1)\ e^{x^2-x+3}$.

  Si on pose $u(x) = x^2 – x +3$, alors $u'(x) = 2x -1$.

  Ainsi f(x) est de la forme $u'e^u$. donc $F(x) = e^{x^2-x+3} + K$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.e^{\sqrt{x}}$.

  Posons $u(x) = \sqrt{x}$. On a $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

  $f(x) = 2.\frac{1}{2\sqrt{x}}.e^{\sqrt{x}}$.

  Donc $F(x) = 2\ e^{\sqrt{x}} + K$

7. Limites classiques

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

La fonction f définie par $f(x) = e^x$ est dérivable sur IR, donc elle est dérivable en 0.

D'une part $f'(x) = e^x$, donc $f'(0) = e^0 = 1$

D'autre part, $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

ou $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$,

ce qui donne $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Posons $e^{x} = u$, donc $x = \ln u$, et quand $x \to +\infty$, $u \to +\infty$,

Et $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{u \to +\infty} \frac{u}{\ln u} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{\ln u}{u}}$

Or $\lim_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0^+$. Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x.\ e^x = 0$

Posons u = - x. On a x = - u, et quand x → - ∞, u → + ∞

Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} x.\ e^x = \lim\limits_{u \to +\infty} -u.\ e^{-u} = \lim\limits_{u \to +\infty} -\dfrac{u}{e^u} = \lim\limits_{u \to +\infty} -\dfrac{1}{\dfrac{e^u}{u}}$

Comme $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} x.\ e^x = 0$

8. Variations et courbe

Soit f (x) = e^x.

- D_f = IR
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- f est dérivable sur D_f et f ‘ (x) = e^x.
  f ‘(x) > 0 pour tout réel x donc f est strictement croissante.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f '(x)	+
f(x)	0 ↗ $+\infty$

- Branches infinies

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d’équation y = 0 est une asymptote en - ∞

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc on a une branche parabolique de direction asymptotique (y ’ O y).