FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1. Définition

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et continue sur $I =]0 ; +\infty[$, elle admet donc sur I des primitives. Il en existe une et une seule qui s'annule en x=1.

La fonction logarithme népérien, notée ln (ou Log) est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en 1.

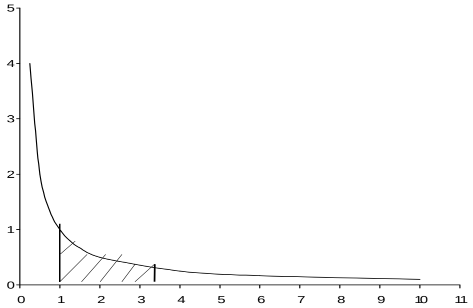
Donc si f(x) = ln x, alors

- $D_f =]0 ;+\infty[$
- $f'(x) = \frac{1}{x}$
- f(1)= ln 1 = 0.

Comme ln est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1, alors $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

Interprétation géométrique

Le réel ln x est l'aire algébrique du domaine plan situé entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et les droites verticales d'abscisses 1 et x.



2. Sens de variation

Pour tout x > 0, on a $\frac{1}{x} > 0$ et donc (ln x) ' > 0. Par conséquent, la fonction $x \mapsto$ ln x *est strictement croissante sur* $]0 ; +\infty[$

Conséquences :

Pour tous réels a > 0 et b > 0
- . a = b si et seulement si ln a = ln b
- . a > b si et seulement si ln a > ln b
- . a>1 si et seulement si ln a > 0
- . 0<a<1 si et seulement si ln a < 0

Propriétés algébriques

Théorème :

- Pour tous réels a > 0 et b > 0 , ln (a.b) = ln a + ln b

Plus généralement, pour tous réels a et b, ln | a . b | = ln |a| + ln |b|

- . Pour tout a > 0, $\ln\frac{1}{a}=-\ln a$
- . Pour tous réels a > 0 et b > 0, $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

Démonstrations

- Considérons les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par f(x) = ln (ax) et g(x) = ln a + ln x, où a est un réel strictement positif.

On a respectivement f '(x) $=a\frac{1}{ax}=\frac{1}{x}$ et g '(x) $=\frac{1}{x}$

alors f '(x) = g '(x) donc f et g sont des primitives de $x\mapsto\frac{1}{x}$

D'après une propriété des intégrales, f et g diffèrent d'une constante : il existe un réel k tel que f(x) = g(x)+ k pour tout x.
En particulier f(1) = g(1) + k, or f(1) = g(1) = 0 donc k = 0.
Conclusion : pour tout a > 0 et x > 0 ln ax = ln a + ln x.

- $\ln\frac{a}{a}=\ln(a\cdot\frac{1}{a})=\ln a+\ln\frac{1}{a}$

  Or $\ln\frac{a}{a}=\ln 1=0$, d'où $\ln(a)+\ln(\frac{1}{a})=0$

  Ainsi $\ln\frac{1}{a}=-\ln a$

  - $\ln\frac{a}{b}=\ln(a\cdot\frac{1}{b})=\ln a+\ln\frac{1}{b}$
  - Or, d'après la propriété précédente, $\ln\frac{1}{b}=-\ln b$, donc $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

Théorème

. Pour tout réel a et pour tout entier n, $\ln a^n = n \ln a$

Pour tout réel a > 0 et pour tout nombre rationnel r, $\ln a^r = r.\ln a$

. En particulier, pour tout réel a > 0, $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$

Démonstrations

- [illegible]
- Soit q un entier strictement positif et a >0, alors $a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q$ et $\ln a = \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = q\ln a^{\frac{1}{q}}$

  Donc $\ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q}\ln a$.

  Soit $r = \frac{p}{q}$ un nombre irrationnel. Alors $\ln a^r = \ln a^{\frac{p}{q}} = \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = p\ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$

  Ainsi $\ln a^r = \frac{p}{q}.\ln a = r.\ln a$

- $\ln\sqrt{a} = \ln(a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln a$.

3. Etude de la fonction ln

Soit f(x) = ln x, alors

- $D_f =]\mathbf{0}\ ;+\infty[$
- Limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

Démonstration :

Nous avons à montrer que pour les grandes valeurs de x, les réels $\ln x$ dépassent tout réel M fixe, aussi grand soit-il.

Soit M un réel, cherchons si, pour tout réel x assez grand, on a ln x > M.

On a, pour tout entier n et pour tout **x > 0** ; **x > 2^n** implique **ln x > ln 2^n** i.e. **ln x > n . ln 2.**

Pour avoir **ln x > M**, il suffit donc d'avoir n . **ln 2 > M**. i.e. $\mathbf{n} > \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{\ln\ 2}}$.

Soit l'entier n, $\left(\mathbf{n} > \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{\ln\ 2}}\right)$, du fait que ln est croissante, pour tout **x > 2^n**,

ln x > ln 2^n > M ; d'où, $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Démonstration

On pose $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}$. Alors $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{u}}$, et si x tend vers 0^+ , u tend vers $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{u\to+\infty} \ln\frac{1}{u} = \lim_{u\to+\infty} -\ln u$$

D'après le résultat précédent, $\lim\limits_{u \to +\infty} \ln u = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

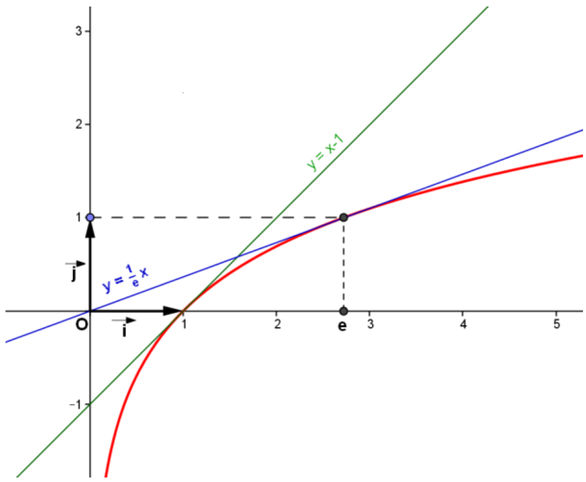
- Dérivabilité et dérivée :

f est dérivable, puisque c'est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$

- Sens de variation

$f'(x) = \frac{1}{x}$ > 0, ce qui implique : la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$

x	0	$+\infty$
f'(x)	‖	+
f	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$



La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation y = x - 1

La tangente au point d'abscisse e a pour équation $y = \frac{1}{e}x$

Limites classiques

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

Démonstrations

- La fonction ln est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty[$, donc elle est dérivable en 1.

  $f'(x) = \frac{1}{x}$, donc f'(1) = 1

  Or $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h}$

  D'où le résultat

- Pour $t > 1$, $1 \le \sqrt{t} \le t$, donc $0 < \frac{1}{t} \le \frac{1}{\sqrt{t}} \le 1$

  Soit $x \ge 1$, on a $\int_1^x 0\,dt < \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \le \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$. Ce qui donne

  $0 < \ln x \le 2\sqrt{x} - 2$.

  Or $2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x}$, donc $0 < \ln x < 2\sqrt{x}$

En divisant par le même nombre x strictement positif (puisque $x \geq 1$),

$$0 < \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0, \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\ x}{x} = 0$$

- Posons $u = \frac{1}{x}$; on a $x = \frac{1}{u}$, et si x tend vers 0^+, u tend vers $+\infty$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} x.\ln x = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{1}{u}\ln(\frac{1}{u}) = \lim\limits_{u \to +\infty} -\frac{1}{u}\ln(u)$

$$\lim_{x \to 0^+} x.\ln x = \lim_{u \to +\infty} -\frac{\ln(u)}{u} = -\infty$$

4. Dérivée et primitives

Soit u une fonction et f la fonction définie par **f(x)= ln [u(x)]**

- **Ensemble de définition**

  f(x)= ln [u(x)] est définie pour tout réel x tel que u(x) est défini et **u (x) > 0**

- **Dérivabilité et dérivée**

  D'après la propriété de dérivabilité d'une fonction composée, si u est dérivable, alors f est dérivable.

  Rappelons que la dérivée d'une fonction composée f o u est (fou) ' = f '(u).u ' .

  En l'appliquant à la fonction $x \mapsto \ln [u(x)]$, nous avons :

$$\ln(u)' = (\ln' u).u' = \frac{u'}{u}$$

Considérons la fonction g définie par g(x)= ln |u(x)|.

- Si **u(x) > 0**, **g (x) = ln[u(x)],** et $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Si **u(x) < 0**, **g(x)= ln[-u(x)],** et $g'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Donc

- Si $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ alors les primitives de f sont les fonctions F définies par **F(x) = ln|u(x)| + k**

En particulier :

- si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors **F(x) = ln|x| + k**
- si $f(x) = \frac{1}{ax+b}$, alors $F(x) = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + k$

5. Résolution de l'équation ln x = m (m réel donné)

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$, c'est donc une bijection de $]0\ ;+\infty[$ sur IR.

Pour tout réel m, l'équation ln x = m admet donc une solution unique dans l'intervalle $]0\ ;+\infty[$

Il existe donc un unique réel dont le logarithme népérien est 1. Ce réel est noté e. **ln e = 1**.

Le réel *e* est appelé *base des logarithmes népériens*. **e** $\approx$ **2,718…**

Solution de l'équation ln x = m

Cette solution est unique et nous la noterons e^{m}.

Donc, dire **ln x = m revient à dire x =** $\mathbf{e^{m}}$.

Résolution d'une inéquation

La fonction ln étant croissante pour tout x de $]0\ ;+\infty[$, alors ln x > m pour tout x > e^{m}.

Résolution de l'équation ln u(x) = m

On commence par déterminer l'ensemble de définition de l'équation.

On utilise ensuite la relation du paragraphe 6. i.e. ln u(x) = m si et seulement si u (x) = e^{m}.

La ou les racines cherchées sont celles qui appartiennent à l'ensemble de définition.

Exemple : *Résoudre dans IR l'équation ln (2x + 3) = 1*.

Dans le cas de la résolution d'une **inéquation**, on suit les mêmes étapes que précédemment.

Exemple : *Résoudre dans IR l'inéquation ln (x - 1) > 2.*

Ensemble de définition : D = { x, x $\in$ IR / x - 1 > 0 } i.e. D =] 1, $+\infty$ [.

Comme la fonction ln est croissante, ln (x - 1) > 2 si et seulement si (x - 1) > e^{2}