Exercice 1 :

Intégrer les équations différentielles suivantes

1) $y' - 5y = 0$; $2y' = \frac{-y}{2}$; $3y' + 5y = 0$; $9y^2 = (y')^2$; $(y')^2 - 2yy' = 0$.
2) $2y'' - 14y' + 20y = 0$; $y'' + 8y' + 16y = 0$; $3y'' + 9y' - 12y = 0$.
3) $y'' - 4y' + 13y = 0$; $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y'' - 8y' + 25y = 0$.
4) $y'' - 16y = 0$; $y'' + 25y = 0$; $9y'' + 64y = 0$; $9y'' - 36y = 0$;

5) $y'' + 9y = 0$ sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.
6) $4y'' + 49y = 0$ sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Trouver la solution f de chacune des équations différentielles vérifiant les conditions initiales ci-dessous :

1) (E_1) : $y'' + y' - 6y = 0$ sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -8$.
2) (E_2) : $y'' + 6y' + 9y = 0$ sachant que $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$.
3) (E_3) : $y'' - 6y' + 13y = 0$ sachant que $f(0) = 3$ et $f'(0) = 5$.
4) (E_5) : $y'' - 3y' - 4y = 0$ sachant que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 4$.
5) (E_6) : $4y'' + 4y' + 65y = 0$ sachant que $f(\pi) = 2$ et $f'(\pi) = 0$.

Exercice 2 :

1°) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = 0$ **(1).**

2°) Soit l'équation différentielle : $y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = e^{3x}$ **(2).**

a) Montrer que la fonction h définie par $h(x) = \frac{2}{5}e^{3x}$ est solution de **(2)**.

b) On admettra qu'une fonction f est solution de **(2)** si et seulement si (f – h) est solution de **(1)**. En déduire les solutions de **(2).**

3°) Déterminer la solution f de **(2)** dont la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère orthonormé (O ; i ; j) passe par le point A $(0 ; \frac{2}{5})$ et dont la tangente en A à $(\mathcal{C}_f)$ a pour coefficient directeur 2.

Exercice 3 :

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 0$.

1) Intégrer cette équation différentielle (E).
2) Déterminer la solution f de cette équation différentielle sachant que :
   a) La courbe $(\mathcal{C}_f)$ passe par le point A (0 ; 4) ;
   b) La tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0, a pour coefficient directeur 2.
3) Etudier la fonction f déterminée ci-dessus et tracer sa courbe $(\mathcal{C}_f)$.
4) Calculer l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 4 :

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 4y = 0$.

1) Déterminer la solution f de (E) sachant que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$;
2) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; i ; j) d'unité 2cm.
3) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe et les droites d'équations respectives $y = 0$; $x = -1$ et $x = 1$.

Exercice 5 :

Soit les équations différentielles :

$$(E) : y'' + 4y' + 4y = 4x + 12 \quad \text{et} \quad (E_1) : y'' + 4y' + 4y = 0.$$

1°) Trouver les réels a et b pour que la fonction g définie par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E).

2°) Pour toute fonction f solution de (E), montrer que si (f+g) est solution de (E) alors f est solution de(E_1).

3°) Intégrer sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1).

4°) Déterminer la solution f de (E_1) sachant que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$.

5°) Étudier la fonction f et tracer sa courbe (Cf).

6°) Calculer l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (Cf) l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 6 :

Soient les équations différentielles : $(E_0) : y'' + 4y' + 4y = 4x$ et $(E_1) : y'' + 4y' + 4y = 0$.

1°) Trouver les réels a et b pour que $h : x \mapsto h(x) = ax+b$ soit solution de (E_0).
2°) Déterminer la solution g de (E_1) sachant que $g(0) = 1$ et $g'(0) = -1$.
3°) Soit la fonction f définie sur $[0 ;+\infty[$ par : $f(x) = g(x) - h(x)$. Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm .
4°) Etudier la fonction f ' dérivée de f sur $[0 ;+\infty[$ et en déduire le signe de $f'(x)$.
5°) Etudier la fonction f sur $[0 ;+\infty[$.
6°) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f admet une asymptote (D) que l'on précisera.
7°) a) Etablir que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0 ;+\infty[$ une solution unique α.

b) montrer que : $1 \leq \alpha \leq 2$.

8°) Construire $(\mathcal{C}_f)$ et (D) sur un même graphique.
9°) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'asymptote (D) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 7 :

1) Soit l'équation différentielle (E) : y '' – 3y ' + 2y = 0.

   Déterminer la solution f de (E) sachant que f (0) = – 3 et f '(0) = – 2 .

2) Etudier les variations de f (on déterminera les coordonnées des points d'intersection de la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f avec les axes de coordonnées).

3) Etudier les positions relatives de ($\mathcal{C}_f$) avec son asymptote horizontale (Δ).

4) Tracer (Δ) et ($\mathcal{C}_f$) dans un repère orthonormal d'unité graphique 2cm.

5) Calculer en cm², l'aire de la partie du plan limitée par ($\mathcal{C}_f$) l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

   a) Déterminer la limite de la suite (U_n).

   b) Déterminer l'entier naturel k pour lequel on a $\left| U_k - \alpha \right| \leq 10^{-3}$.

Exercice 8 :

1) Soit l'équation différentielle (E) : y '' – 3y ' + 2y = 0.

   Déterminer la solution g de (E) sachant que g(0) = $-\dfrac{7}{2}$ et g ' (0) = – 3 .

2) Soit la fonction f définie par f(x) = g(x) + 3x. Soit ($\mathcal{C}_f$) la courbe de f dans un repère d'unité graphique 2 cm. Etudier les variations de f.

3) Montrer que ($\mathcal{C}_f$) admet en – ∞ une asymptote oblique ($\mathcal{D}$) dont on donnera une équation.

4) Etudier les positions relatives de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à ($\mathcal{D}$).

5) Tracer ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{C}_f$).

6) Soit α un réel négatif ou nul. On désigne par A(α) l'aire, en cm² du domaine plan limité par ($\mathcal{C}_f$), l'asymptote oblique ($\mathcal{D}$) et les droites d'équations :

   x = α et x = 3ln2.

   a) Calculer A(α) ;

   b) En déduire A(0) ;

   c) Calculer la limite de A(α) lorsque α tend vers – ∞.

   NB : On donne ln3 = 1,09 ; 3ln3 – $\dfrac{15}{2}$ *= – 4,20 ; ln2 = 0,69.*

Exercice 09 :

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E_1) : y '' – 3y ' + 2y = 8x² – 24x.

1°) Déterminer les nombres réels a ; b ; c pour que la fonction numérique g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

2°) Démontrer que la fonction f est solution de l'é quation (E_1) si et seulement si la fonction $h = (f - g)$ est solution de l'équation différentielle : (E_2) : h''– 3h' + 2 h = 0.

3°) Intégrer l'équation différentielle (E_2). En déduire les solutions les solutions de l'équation différentielle (E_1) sur $\mathbb{R}$.

4°) Déterminer la solution particulière φ de (E_1) telle que :

$$\varphi(0) = 0 \ et \ \varphi'(0) = 0.$$

Partie B :

On considère la fonction numérique φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = -4e^{2x} + 8e^{x} + 4x^2 - 4.$$

1°) a) Calculer $\varphi'(x) \ et \ \varphi''(x)$. On vérifiera que $\varphi''(x) = -8(2e^x + 1)(e^x - 1)$

Etudier les variations de la fonction φ'. En déduire le signe de $\varphi'(x)$ et le sens de variation de φ.

b) Déterminer les limites de φ en $-\infty$. Déterminer les limites de φ en +∞ ; on pourra remarquer que : $\varphi(x) = -4e^{2x}(1 - \frac{2}{e^x} - \frac{x^2}{e^{2x}}) - 4$

2°) Dresser le tableau des variations de la fonctio n g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)= 4x^2 - 4$$

3°) On désigne respectivement par ($\mathcal{C}_\varphi$) et ($\mathcal{C}_g$) les courbes représentatives des fonctions φ et g dans le plan muni d'un repère orthonormé.

a) Montrer que pour tout réel x , $\varphi(x) - g(x) = -4e^x(e^x - 2)$
b) En déduire la position relative des courbes ($\mathcal{C}_\varphi$) et ($\mathcal{C}_g$).
c) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} (\varphi(x) - g(x))$.

4°) Tracer les courbes ($\mathcal{C}_\varphi$) et ($\mathcal{C}_g$) dans le même repère.

5°) Calculer l'intégrale $I = \int_{\alpha}^{\ln 2} \left(-4e^{2x} + 8e^{x}\right)dx$ où α est un réel tel que (α< ln2).

6°) On note A(α) l'aire en cm² du domaine limité par les courbes ($\mathcal{C}_\varphi$) ; ($\mathcal{C}_g$) et les droites d'équations respectives x = α et x = ln2.

a) Mettre en évidence le domaine sur le graphique ;
b) Calculer en cm² l'aire A(α) ;
c) Calculer la limite de A(α) lorsque α tend vers – ∞.

Exercice 10 :

Partie A :

1°) Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = \cos x$

a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction g définie par

$g(x) = a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E).

b) Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que (f +g) est une solution de (E) si et seulement si f est solution de l'équation différentielle (E_1):$y' + 2y = 0$.

c) Intégrer (E_1) et en déduire les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$.

2°) Soit à résoudre l'équation différentielle (F) : $y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}$.

a) Déterminer le nombre réel k tel que la fonction g définie par $g(x) = ke^{-2x}$ soit solution de (F).

b) Résoudre (F_1) : $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Partie B :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = (x-3)e^{-x}$.

1°) Résoudre (E1) : $y' + 2y = 0$

2°) Trouver les réels a et b pour que $f(x)=(ax+b)e^{-x}$ soit solution de (E).

3°) Démontrer que h est solution de (E) implique qu e (h-f) est solution de (E_1)

4°) En déduire toutes les solutions de (E) et trouv er celle qui passe par le point de coordonnées (0 ;1).