Suites numériques - exercices

Raisonnement par récurrence

Exercice 1 : On rappelle que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : n!= 1 x 2 x 3 x...x n.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$

Exercice 2 : On définit la suite (u_n) sur N par : u_0= 1 et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$
À l'aide d'un raisonnement par récurrence, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

Exercice 3 : (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ pour tout entier naturel n.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

Exercice 4 : (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout entier naturel n.
Démontrer que pour tout n > 0, $u_n = 3 - 2^n$.

Exercice 5 : (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = -u_n + 4$ pour tout entier naturel n.
Démontrer que pour tout n > 0, $u_n = 2 + (-1)^n$.

Exercice 6 : (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$et $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$ pour tout entier naturel n.
1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
3) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 7 :
1. Rappeler la valeur de $S_n = 1+2+3+...+n$.
2. On appelle S'_n la somme $S'_n = 1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)$.

a. Montrer par récurrence que pour tout n on a $S'_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

b. On admettra que $S'_n = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2$. Déduire des résultats précédents la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ en fonction de n.

3. Montrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

4. On cherche à généraliser les résultats précédents : p désigne un entier supérieur à 1, et on définit la somme : $S(n,p) = 1\times 2\times ...\times p\ + 2\times 3\times ...\times (p+1)\ + 3\times 4\times ...\times (p+2) + ... + n(n+1)...(n+p-1)$

Montrer par récurrence sur n (p est supposé fixé) que $S(n,p) = \dfrac{n(n+1)(n+2)...(n+p)}{p+1}$.

Suites récurrentes

Exercice 8 : 1. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_4 + u_6 = 6$ et $u_8 + u_{10} + u_{12} + u_{14} = 228$.
Déterminez u_0 et la raison r de u_n.
2. Mêmes questions si $u_{10}=52$ et $u_{15}=137$.

Exercice 9 : Une suite géométrique (u_n) est telle que $u_o.u_3=32$ et $u_0+u_3=18$. Déterminez la raison et le premier terme de (u_n).

Exercice 10 : Trouvez les trois termes consécutifs u_1, u_2, u_3 d'une suite géométrique croissante sachant que : $u_1\ u_3 = 4u_2$ et $u_1 + u_2 + u_3 = 14$.

Exercice 11 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ pour tout n entier naturel.

1. Donner les valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1, u_2, …, u_{10}.
2. Démontrer que, pour tout n de IN , $0 \le u_n \le 3$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
4. Déterminer lim u_n.

Exercice 12 : On définit une suite (un) de la manière suivante : u0 = 0 ; pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{5\,u_n - 3}{3\,u_n - 1}$

1. On suppose que, pour tout entier n, on a: $u_n \neq \dfrac{1}{3}$. Démontrez que, pour tout entier n, on a : $u_n \neq 1$.

2. On pose, pour tout entier n, $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$.

Démontrez que la suite (v_n) ainsi définie est arithmétique.

Calculez v_n, puis u_n en fonction de n, et vérifiez que la condition $u_n \neq \dfrac{1}{3}$ est bien satisfaite

Exercice 13 : Soit une suite (u_n) réelle définie par les relations u_0 et $2\,u_{n+1} - 5\,u_n = 3$.
1. Calculez u_1, u_2, u_3.
2. On considère la suite (v_n) dont le terme général est défini par $v_n = u_n + 1$.
Montrez que (v_n) est une suite géométrique dont vous déterminerez le premier terme v_0 et la raison.
3. Calculez le terme général v_n en fonction de n.
4. Calculez $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$,
puis $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n.

Exercice 14 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que $u_n > 0$ pour tout n et que la suite (u_n) et croissante.
3. Montrer que, quel que soit n > 0 , $u_n > u_{n-1} + \dfrac{1}{2}$. En déduire que $u_n > 1 + \dfrac{n}{2}$.

La suite est-elle convergente ou divergente ?

Exercice 15 : Soit (u_n) la suite définie par u_o et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n - 1}{2\,u_n + 5}$, $n \in IN$ et

$u_n \neq -\dfrac{5}{2}$

1- Calculer u_n pour n=1, 2 et 3.

2- On suppose que u_n existe, démontrez que l'on a $u_n \neq -1$ pour tout n.

3- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrez que (v_n) est une suite géométrique.

4- Calculer v_n, puis u_n en fonction de n. En déduire lim v_n et lim u_n.

Exercice 16 : On considère la suite (u_n) sur IN* par $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{2}{u_n})$.

1. a) Montrer que, pour tout n, $u_n > 0$.

b) Montrer que si (u_n) est convergente , alors nécessairement $\lim(u_n) = \sqrt{2}$.

2.a) Démontrer l'égalité $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n}$. Déduisez-en que pour tout n , $u_n > \sqrt{2}$.

b) Démontrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) + \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire que $u_{n+1} - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$.

3. Démontrer que $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n$. En déduire que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

4. Montrer que $u_n - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2^{n-1}}(u_1 - \sqrt{2})$; Retrouver ainsi que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$

Exercice 17 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=e$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln u_n$.

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$, en déduire que v_n est le terme général d'une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b. Donner l'expression de v_n en fonction de n. En déduire celle de u_n en fonction de n.

2. Pour tout entier naturel n on pose $S_n = v_0+v_1+\ldots+v_n$ et $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$.

a. Montrer que $P_n = e^{S_n}$.

b. Exprimer S_n en fonction de n.

c. En déduire l'expression de P_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (S_n) ; en déduire celle de la suite (P_n).

Suites adjacentes

Exercice 18 : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$ pour tout n de IN.

1. Donner les valeurs de u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4.
2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Quelle est leur limite ?
4. Que peut-on dire du nombre dont l'écriture décimale est 0,9999… ?

Exercice 19 : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \sum_{p=1}^{p=n} \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$,

et la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

1. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Soit L leur limite. Donner un entier n_0 pour lequel l'encadrement de L par u_{n_0} et v_{n_0} est un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3}.
3. Donner à la calculatrice une valeur approchée de u_{n_0} et v_{n_0}. Est-il possible que L soit égal à $\frac{\pi^2}{6}$?

Exercice 20 : On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_1 = 12$, $v_1 = 1$,

$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $w_n = u_n - v_n$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique à termes positifs, déterminer sa limite et exprimer w_n en fonction de n.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, démontrer que $u_n \geq v_n$.

En déduire que $u_1 \geq u_n \geq v_n \geq v_1$.

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $t_n = 3u_n + 8v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite constante.
5. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n, puis les limites de (u_n) et (v_n).