Suites définies à l'aide intégrales

Exercice 1 : Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,dx$.

1- Calculer I_0.
2- Par une intégration par parties I_1.
3- Montrer que, pour tout entier non nul, on a la relation de récurrence $(3+2n)\, I_n = 2n\, I_{n-1}$.

Exercice 2 : Soit $I_n = \int_0^1 (x^2-1)^n dx$, n entier naturel.

1. Etablir la relation de récurrence $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ si $n \geq 1$.
2. En déduire la valeur de I_n.

Exercice 3 : On désigne par n un nombre entier relatif différent de −1 et par x un nombre réel supérieur ou égal à 1.

1. Calculer l'intégrale $I_n(x) = \int_1^x t^n \ln t\, dt$ (on pourra effectuer une intégration par parties).
2. En déduire le calcul de $J_n(x) = \int_1^x t^n (\ln t)^2\, dt$.
3. Calculer $I_n(e) - J_n(e)$.
4. déterminer la limite de $\dfrac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : On pose $I_0 = \int_1^e x\,dx$ et $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ pour tout n entier non nul.

1. Calculer I_0 et I_1 (on pourra utiliser une intégration par parties).
2. Montrer que pour tout n entier $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$. Calculer I_2 .
3. Montrer que pour tout n entier, $I_{n+1} \leq I_n$. En déduire en utilisant la relation du 2° l'encadrement suivant : $\dfrac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+2}$.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 5 : On considère les suites de termes généraux $u_n = \int_1^2 \dfrac{(\ln x)^n}{x} dx$ et $v_n = (\ln 2)^n$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
3. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

Exercice 6 : Soit p et n des entiers naturels. On pose $I_{p,n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n \, dx$.

1. Calculer $I_{p,0}$ et $I_{p,1}$.
2. Calculer $I_{0,n}$ et en déduire $I_{1,n}$.
3. Etablir une relation de récurrence entre $I_{p,n}$ et $I_{p+1,n+1}$.

En déduire la valeur de $I_{p,n}$ en fonction de p et n.

Exercice 7 : Soit $S_n = 1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} + \ldots + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ pour n dans IN*.

1. Montrer que, pour $n \geq 1$, $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{3}}} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$.
2. En déduire l'encadrement $\int_1^n \frac{dt}{t^{\frac{1}{3}}} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^{\frac{1}{3}}}$. Prouver que $\frac{S_n}{n^{\frac{1}{3}}}$ admet une limite finie a que l'on précisera.
3. On pose $u_n = S_n - a\, n^{\frac{1}{3}}$. En utilisant les encadrements précédents, montrer que la suite (u_n) est bornée et décroissante. Montrer qu'elle est convergente.

Exercice 8 : On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.

On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$.

1. Calculer I_1.
2. Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
4. Démontrer par récurrence que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n$.
5. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).
7. Justifier enfin que : $e^2 = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!}\right)$.