# Fonction définie par une intégrale

## Exercice 1

On considère la fonction F définie sur ]0 ; +∞ [ par $F(x)=\int_1^x (1+e^{-t})\ln t\,dt$

1. Quel est le signe de F(x) suivant les valeurs de x ?
2. Étudier le sens de variations de la fonction F.
3. a. Démontrer que pour tout réel x supérieur à 1, $F(x)\geq \int_1^x \ln t\,dt$

b. En déduire la limite de F en +∞.

## Exercice 2

Soit la fonction numérique f définie sur ]0 ; + ∞[ par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x^2}$.

On appelle F la primitive de f sur ] 0 ; + ∞[ qui s'annule en 1. Ainsi l'on a, pour tout réel x de ] 0 ; + ∞[,

$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.

1. Étudier le sens de variation de F sur ]0 ; + ∞[.
2. Démontrer que, pour tout x supérieur ou égal à 2, $\int_2^x f(2)\,dt\leq \int_2^x f(t)\,dt$.

Par comparaison de limites, et en utilisant la relation de Chasles, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

## Exercice 3

On considère la fonction numérique f de la variable réel x définie sur l'intervalle [1 ; +∞ [ par $f(x)=\sqrt{x}\,e^{1-x}$

On note F la fonction numérique de la variable réelle x définie sur [1 ; +∞ [ par $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

1. a. Montrer que F est dérivable sur [1 ; +∞ [ et calculer F ' (x).
b. En déduire le sens de variations de F.
2. a. Démontrer que, pour tout réel t positif, $t+2\geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.

b. En déduire que, pour tout x de l'intervalle [1 ; +∞ [, $F(x)\leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$.

c. À l'aide d'un intégration par parties, montrer que, pour tout x appartenant à [1 ; +∞ [,

$\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt=(x+3)e^{1-x}$.

d. En déduire que, pour tout x appartenant à [1 ; +∞ [, $0\leq F(x)\leq \sqrt{2}$

## Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. $(O;\vec{i},\vec{j})$ On note :

– I le point de coordonnées (1 ; 0)
– f est une fonction positive, strictement croissante et dérivable sur l'intervalle [0, 1], C sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
- Δ la portion de plan comprise entre la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations x =0 et x = 1.

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à l'intervalle [0, 1] tel que, si A est le point de C d'abscisse α, le segment [I A] partage en deux régions de même aire.
Pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on note :
– $M_x$ le point de coordonnées (x, f (x))
– $T_x$ le domaine délimité par la droite ($IM_x$ ), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe C
– g (x) l'aire de $T_x$ .

On désigne par F la fonction définie sur l'intervalle [0, 1] par $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Exprimer, pour tout x appartenant à l'intervalle [0, 1], g (x) en fonction de x, f (x) et F(x).
2. Démonstration de cours. Démontrer que F est dérivable et a pour dérivée f .
3. Étudier les variations de la fonction $g: x \mapsto g(x)$ sur [0, 1].
4. a. Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt$.

b. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha$ de [0, 1] tel que g ($\alpha$) soit égal à la moitié de l'aire de $\Delta$.

**Exercice 5**

I - On considère les fonctions f et g définies sur [0 ; +∞ [ par $f(x)=e^{-x^2}$ et $g(x)=x^2e^{-x^2}$..

On note respectivement $C_f$ et $C_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

1. Identifier $C_f$ et $C_g$ sur la figure fournie (justifier la réponse apportée).
2. Étudier la parité des fonctions f et g.
3. Étudier le sens de variation de f et de g . Étudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.
4. Étudier la position relative de $C_f$ et $C_g$.

II - On considère la fonction G définie sur IR par $G(x)=\int_0^x t^2e^{-t^2}\,dt$.

1. Que représente G pour la fonction g ?
2. Donner, pour x > 0, une interprétation de G(x) en termes d'aires.
3. Étudier le sens de variations de G sur [0 ; +∞ [ .

On définit la fonction F sur [0 ; +∞ [ par : pour tout réel x, $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

4. Démontrer, que, pour tout réel x, $G(x)=\frac{1}{2}\left[F(x)-x\,e^{-x^2}\right]$ ; (on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de G et de $x \mapsto \frac{1}{2}\left[F(x)-x\,e^{-x^2}\right]$.

On admet que la fonction F admet une limite finie L en $+\infty$, et que cette limite L est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine A limité par la courbe $C_f$ et les demi-droites $[O; \vec{i})$ et $[O; \vec{j})$.

5. a. Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

b. Interpréter en termes d'aires le réel $N=\int_0^1 (1-t^2)e^{-t^2}\,dt$.

c. En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire P en unités d'aire du domaine D limité par la demi-droite $[O; \vec{i})$ et la courbe $C_g$ justifier graphiquement que : $N=\int_0^1 (1-t^2)e^{-t^2}\,dt \geq \frac{L}{2}$.