Exemples d'équation et d'inéquation avec logarithme

Exemple 1

Résoudre l'équation ln x = -2

Solution

ln x = -2

x doit être strictement positif

ln x = -2 ln e = ln e^{-2}

Donc x = e^{-2} , et S = $\{e^{-2}\}$

Exemple 2

Résoudre $\ln^2 x - \ln x = 0$

Solution

Le domaine de validité de l'équation est D =] 0 ; + ∞ [.

$\ln^2 x - \ln x = \ln x (\ln x - 1)$

Donc l'équation équivaut à ln x = 0, ou ln x = 1

Ce qui donne x = 1 ou x = e. Et S = $\{1 ; e\}$

Exemple 3

Résoudre $2 \ln^2 x - \ln x - 3 = 0$

Solution

Le domaine de validité de l'équation est D =] 0 ; + ∞ [.

Posons X = ln x.

L'équation est équivalente au système $\begin{cases} 2X^2 - X - 3 = 0 \\ X = \ln x \end{cases}$ où x > 0

La résolution de l'équation (1) donne X = - 1 où X = $\frac{3}{2}$.

Pour X = -1, on a ln x = -1 = -1. ln e = ln e^{-1} , qui donne la solution x = e^{-1}

Pour X = $\frac{3}{2}$, on a ln x = $\frac{3}{2}$ = $\frac{3}{2}$ ln e = ln $e^{\frac{3}{2}}$. ce qui donne x = $e^{\frac{3}{2}}$

Donc S = $\left\{e^{-1} ; e^{\frac{3}{2}}\right\}$

Exemple 4

Résoudre ln (2x -1) = 2

Solution

ln (2x-1) est défini si 2x -1 > 0, donc le domaine de validité de l'équation est D =] $\frac{1}{2}$; + ∞ [.

ln (2x -1) = 2 si et seulement si ln (2x -1) = ln e^2

Donc 2x -1 = e^2

L'ensemble de solution est S = $\left\{\frac{e^2+1}{2}\right\}$

Exemple 5

Résoudre l'inéquation ln x +1 < 0.

Solution

Le domaine de validité de l'équation est D =] 0 ; + ∞ [.

L'inéquation est équivalente à ln x < -1

ln x < ln e $^{-1}$

x < e $^{-1}$

Or le domaine de validité de l'équation est D =] 0 ; + ∞ [., donc x doit être strictement positif.

D'où l'ensemble des solutions est S =] 0 ; e $^{-1}$ [

Exemple 6

Résoudre l'inéquation suivante $3\ln^2 x+2\ln x-1\leq 0$ **(3)**

Solution

Le domaine de validité de l'inéquation est D =] 0 ; + ∞ [.

Posons X = ln x. L'inéquation s 'écrit $3X^2+2X-1\leq 0$ avec X = ln x

Déterminons d'abord les racines de 3 X^2 + 2X - 1 .

$\Delta=\ 2^2-\ 4.3.(-1)=16=4^2$

Les racines sont donc X'= -1 et X'' = $\frac{1}{3}$ et $3X^2+2X-1=\ 3(X+1)(X-\frac{1}{3})$

Comme X = ln x , l'inéquation **(3)** s'écrit $3(\ln x+1)(\ln x-\frac{1}{3})\leq 0$

ln x +1 > 0 si ln x = -1, donc si x = e $^{-1}$

ln x - $\frac{1}{3}$ > 0 si ln x > $\frac{1}{3}$, donc si x > $e^{\frac{1}{3}}$

Tableau de signe

x	0		e^{-1}		$e^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
ln x +1		−	0	+		+	
ln x - $\frac{1}{3}$		−		−	0	+	
3 $\ln^2$x + 2 ln x - 1		+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions est S = [e $^{-1}$; $e^{\frac{1}{3}}$]