Fonctions puissances

1. Puissance réelle d'un nombre strictement positif

Quel que soit le réel strictement positif a et quel que soit le réel b, le réel a^b est noté $e^{b\ln a}$

2. Propriétés

En utilisant les propriétés de fonctions ln et exponentielle, on retrouve toutes les propriétés des puissances :

Quel que soit le réel strictement positif a et quels que soient les réels b et c,

$a^b > 0$, $a^{b+c} = a^b.a^c$, $a^{b-c} = \dfrac{a^b}{a^c}$ $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$

$a^0 = 1$, $a^1 = a$, $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$

3. Fonction puissance

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^\alpha$ où α est un nombre réel.

f est définie sur $D =]0;+\infty[$

Limites

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = \lim\limits_{x\to 0} e^{\alpha\ln x}$

- si $\alpha > 0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha\ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\alpha\ln x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha\ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\alpha\ln x} = +\infty$

- si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha\ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\alpha\ln x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha\ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\alpha\ln x} = 0$

Dérivabilité et dérivée

$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$

f est la composée des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \alpha\ln x$ qui sont dérivables sur $D =]0;+\infty[$, donc f est dérivable.

La formule de dérivation d'une fonction composée nous permet d'avoir $f'(x) = \dfrac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln x} = \dfrac{\alpha}{x}.x^\alpha$. Ce qui donne $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. On remarquera que c'est encore de la forme de la dérivée de la puissance entière.

Tableaux de variations

$\alpha > 0$

x	0	$+\infty$
f '(x)	+	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

$\alpha < 0$

x	0	$+\infty$
f '(x)	—	
f(x)	$+\infty$ ↘	0

Branches infinies

Si $\alpha < 0$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ donc on a une asymptote parallèle à (y'Oy) d'équation x = 0.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc on a une asymptote parallèle à (x'Ox) d'équation y = 0.

Si $\alpha > 0$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha - 1}$

- si $\alpha > 1$, alors $\alpha - 1 > 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha-1} = +\infty$

  donc on a une branche parabolique de direction asymptotique (y'Oy).

- si $\alpha > 1$, alors $\alpha - 1 < 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha-1} = 0$

  donc on a une branche parabolique de direction asymptotique (x'Ox).

Courbes