

Généralités sur les fonctions : série n° 2

Exercice 1

Montrer que quel que soit le réel x , $\sin^4 x \leq \sin^2 x$

Exercice 2

Montrer que pour tous réels x et y , $x^2 + y^2 \geq 2xy$

En déduire que quels que soient les réels x et y positifs, $x + y \geq 2\sqrt{x}\sqrt{y}$

Exercice 3

Montrer que pour tout réel x , $\frac{4}{x^2} \leq \frac{8}{x^2+3} \leq \frac{8}{x^2}$

Exercice 4

Montrer que quels que soient les réels x et y non simultanément nuls, $-\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$

Exercice 5

Montrer que pour tous x et y de $] -1 ; 1 [$, $-1 \leq \frac{x+y}{1+xy} \leq 1$

Exercice 6

Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, $1 - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1 - \frac{x^2}{2}$

Exercice 7

Montrer que :

a) pour tout réel x de $[1 ; 2]$, $2 \leq x^2 - 2x + 3 \leq 3$

b) pour tout x de $[0 ; 3]$, $0 \leq (x-1)^2 \leq 3$

c) pour tout x de $[0, 2]$, $-\frac{1}{8} \leq 2x^2 - 3x + 1 \leq 3$

d) pour tout x de $[\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}]$; $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{2x+1} \leq 1$

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

1) Donner la forme canonique de $f(x)$.

2) En déduire que quel que soit x , $f(x) \geq \frac{23}{8}$

Exercice 9

Soit $f(x) = \frac{x+1}{2x+3}$.

1) Déterminer les réels a et b tels que pour tout x différent de $-\frac{3}{2}$, $f(x) = a + \frac{b}{2x+3}$.

2) En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $[-1 ; +\infty [$.

Exercice 10

1) Montrer que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2\sqrt{n-1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{n}}$

Exercice 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + 3x^2 - 1$.

1) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $[-1 ; 5]$.

2) En déduire un encadrement de $f(x)$ sur cet intervalle.

Exercice 12

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \sin x$.

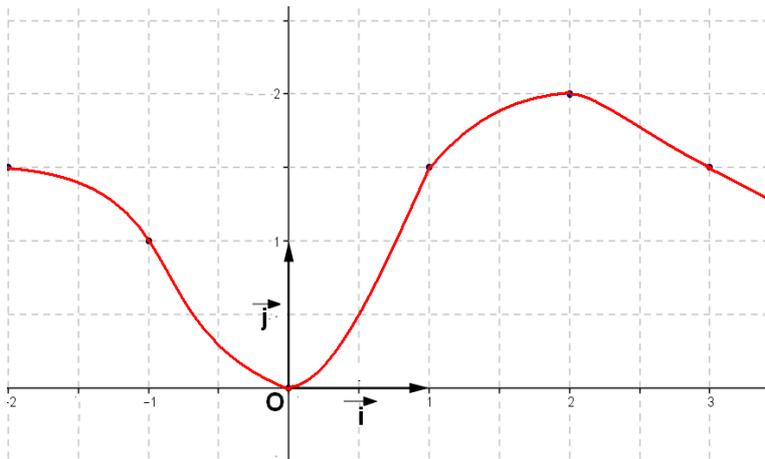
Montrer que f est croissante sur \mathbb{R} . En déduire que pour tout x de $[0, \pi]$, $0 \leq f(x) \leq \pi$

Exercice 13

Montrer que si $0 \leq x \leq 2$, alors $-1 \leq x^2 - x + \sin x \leq 3$

Exercice 14

On donne la courbe représentative d'une fonction f :



Donner un encadrement de $f(x)$ pour x appartenant à $[-2 ; 3]$

Exercice 15

On donne le tableau de variations de f

x	$-\infty$	-2	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-
f	4	-1		3		$-\infty$

Donner un encadrement de $f(x)$ sur chacun des intervalles suivants :

$$]-\infty ; -2[,]-\infty ; 0[,]-\infty ; -2[,]-2 ; 1[\text{ et } [-2 ; \frac{3}{2}]$$