ÉQUATIONS -INÉQUATIONS

1. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS IR

1.1 Trinôme

Un trinôme du second degré est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ où a,b et c sont des réels et $a \neq 0$.

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, on dit que α est une racine de $f(x)$ si $f(\alpha) = 0$.

1.2 Équation du second degré

Une équation du second degré est une équation qui peut se ramener à la forme ax² +bx + c = 0, $a \neq 0$ après transformation.

Le réel Δ = b² - 4 ac est appelé discriminant de l'équation.

1.3 Résolution

Pour résoudre dans IR ax² + bx + c = 0, on calcule Δ = b²- 4ac :

Si $\Delta < 0, S = \phi$

Si $\Delta = 0, S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

Si $\Delta > 0, S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

1.4 Exemple de résolution

Résoudre dans IR 4x² -x -3 = 0.

ici a =4 ; b = -1 ; c = -3 , donc : Δ = (-1)²-4*4*(-3) = 49 qui est positif.

0n a x' = $\frac{-b-\sqrt{(\Delta)}}{2a}$ = $\frac{-(-1)-7}{2X4}$ = $\frac{-3}{4}$; et x''= $\frac{-b+\sqrt{(\Delta)}}{2a}$ = $\frac{-(-1)+7}{2X4}$ =1.

l'ensemble des solutions est S = { $\frac{-3}{4}$; 1 }.

2. Inéquation du second degré dans IR

2.1 Factorisation du trinôme

Factoriser f(x) = ax² +bx +c, $a \neq 0$, c'est l'écrire, lorsque cela est possible, sous forme de produit de facteur du premier degré, c'est à dire sous la forme f(x) = a(x-x')(x-x'').

.

Factoriser un trinôme revient donc à chercher les racines de ce trinôme

Soit à factoriser f(x) = ax² +bx +c, $a \neq 0$ on calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- <u>1er cas :</u> $\Delta<0$

On ne peut pas factoriser f(x)

- <u>2e cas :</u> $\Delta=0$

f(x) = $a(x+\frac{b}{2a})^2$

- <u>3e cas :</u> $\Delta>0$

On a f(x) = a(x-x')(x-x") avec x'= $\frac{-b-\sqrt{(\Delta)}}{2a}$ et x" = $\frac{-b+\sqrt{(\Delta)}}{2a}$.

2.2 signe du trinôme

Pour étudier le signe de f(x) = ax² + bx + c , $a\neq0$, on va essayer de factoriser f(x).

- <u>1er cas :</u> $\Delta<0$

f(x) a même signe que a.

- <u>2e cas :</u> $\Delta=0$

Le tableau de signe de f(x) a la forme suivante :

x		$-\frac{b}{2a}$	
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

- <u>3e cas :</u> $\Delta>0$

le trinôme a 2 racines distinctes x' et x'' en supposant que x'<x", on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x'		x"	$+\infty$
x-x'	-	0	+		+
x-x"	-		-	0	+
(x-x')(x-x")	+	0	-	0	+
f(x)	Signe de a	0	signe de –a	0	signe de a

2.3 Résolution d'inéquation du second degré dans IR

Une inéquation degré dans IR prend l'une des formes suivantes après transformation d'écriture :

ax² + bx +c < 0 ou bien $ax^2+bx+c\leq0$ ou bien $ax^2+bx+c\geq0$ ou bien ax² + bx +c > 0 .

Pour résoudre une telle inéquation, on dresse le tableau de signe de f(x) = ax² + bx +c, on hachure les colonnes avec les signes inutiles. On écrit la solution sous forme de réunion d'intervalles.

3. Somme et produit des racines

0n considère le trinôme f(x) = $ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$). Dans le cas où $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes x' et x".

f(x) = a(x-x')(x-x") =a(x² – (x'+x")x +x'x")= ax² -a(x' + x")x +ax'x".

par identification, on obtient -a(x' + x") = b et ax'x" = c d'où la formule :

S = x' + x" = $\frac{-b}{a}$ et P = x'x"= $\frac{c}{a}$

réciproquement, si on connaît la somme et le produit de deux nombres, ces nombres sont les solutions d'une équation du second degré.C'est à dire si x + y = S et xy = P, x et y sont les solutions de l'équation

$u^2 - Su + P = 0$

4. Racine évidente

Parfois ,on n'est pas obligé de calculer le discriminant . Il y a des racines qu'on peut calculer directement et utiliser la somme ou le produit pour trouver l'autre racine.

- Si a + b +c =0, x= 1 est une solution évidente de $ax^2 + bx + c = 0$,

- Si a + c = b , x= -1 est une solution évidente de $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemple :

- Résoudre dans IR $5x^2 - 4x - 1 = 0$.

0n a 5 – 4 -1 = 0 ; d'où x' = 1 et 1.x" = $\frac{c}{a} = \frac{-1}{5}$. on a S = { $\frac{-1}{5}$; 1 }.

Résoudre dans IR $23x^2 + 117x + 94 = 0$

Ici 23+94 = 117 donc x' = -1 et (-1).x" = $\frac{c}{a} = \frac{94}{23}$ on a S = {-1 ; $\frac{94}{23}$ }