RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

1. Rappels

1.1 Résolution d' un système de deux équations à deux inconnues

Pour résoudre dans IRxIR le système :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On peut procéder par substitution, par combinaison, par la méthode du déterminant.

1.1.1 Exemple de résolution par substitution

0n tire x ou y dans l'une des équations, on porte cette valeur dans l'autre équation . 0n obtient une équation à une inconnue.

Exemple

Résoudre dans IR² :

$$\begin{cases} x + y = 2 \ (E_1) \\ x - y = 2 \ \ (E_2) \end{cases}$$

a) Réponse :

Dans E_2, on obtient x = y + 2, en portant cette valeur dans (E_1),on obtient y + 2 +y = 2 .Ce qui donne y = 0 .

donc x= 2. 0n a : S ={(2 ; 0)}.

1.1.2 Exemple de résolution par combinaison

Soit à résoudre dans IRXIR le système :

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

0n multiplie la première équation par -2 et on additionne membre à membre. 0n obtient :

7y = 7. Ce qui donne y = 1 ; donc, x-3(1) = 0 . On obtient x = 3.

Finalement, l'ensemble des solutions est ; S = {(1 ; 3)}.

1.2 Résolution d' un système d'inéquations à deux inconnues

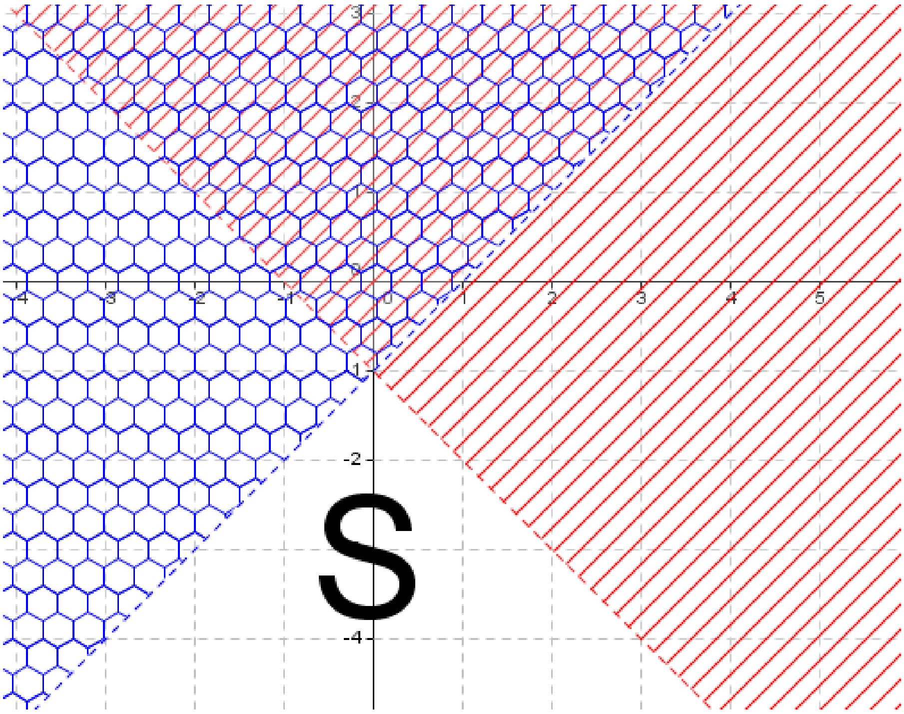
1.2.1 un exemple avec géogebra.

Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} x + y < -1 \\ x - y > 1 \end{cases}$$

Réponse :

- 0n saisit la première inéquation, puis on valide.
- Dans le menu propriété, on inverse le remplissage.
- 0n saisit la deuxième inéquation , puis on valide.
- On inverse aussi le remplissage.
- La solution est la partie non hachurée.



Dans le cas général, pour résoudre un système ,

- on « égalise » à zéro chaque inégalité
- on choisit un point arbitraire pour vérification
- on hachure les parties inutiles
- la solution est la partie non hachurée.

1.2.2 Exemple de programmation linéaire

2. Système de trois équations à trois inconnues.

Soit à résoudre le système :

$$(S_1)\quad \begin{cases} ax+by+cz=d & (L_1) \\ a'x+b'y+c'z=d' & (L_2) \\ a''x+b''y+c''z=d'' & (L_3) \end{cases}$$

La meilleure méthode (et c'est celle du programme) est celle dite de Gauss

Description (simplifiée) de la méthode :

1^ère^ étape : Elimination

On élimine à l'aide de (L_1) une des inconnues, par exemple x dans L_2 et L_3

On obtient alors un système (S_2) équivalent à (S_1), de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = d & (L_1) \\ b_1'y + c_1' = d_1' & (L_2') \\ b_1''y + c_1''z = d_1'' & (L'_3) \end{cases}$$

2^e^ étape :

A l'aide de (L'_2) on élimine dans (L'_3) l'une des inconnues. On obtient alors un système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ b_1'y + c_1' = d_1' \\ c_2''z = d_2'' & (L''_3) \end{cases}$$

équivalent à (S_1)

3^e^ étape : substitution remontante

On détermine z à partir de (L''_3), puis on substitue dans (L''_2)

On refait les mêmes opérations pour y et x.

Exemple :

Résoudre dans IRXIRXIR le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 & (L_1) \\ x - y + 2z = 2 & (L_2) \\ x - 2y - z = -2 & (L_3) \end{cases}$$

Réponse :

$$\begin{matrix} (L_1) \to \\ (L_1 - L_2) \to \\ (L_1 - L_3) \to \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y - z = 1 & (L'_2) \\ 3y + 2z = 5 & (L'_3) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ (2L'_2 - L'_3) \to \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y - z = 1 \\ 7y = 7 \end{cases}$$

$$ce\ qui\ donne \begin{cases} y = 1 \\ 2 - z = 1 \\ z = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$d'où \quad S = \{(1,1,1)\}$$