

OSCILLATEURS MECANIQUES -Corrigés

1. Corrigé sujet 1

Source: <http://www.chimix.com>

Deux périodes sont égales à 1,5 s (lecture graphe)

$T=0,75$ s.

la pulsation ω est égale à $2\pi / T=6,28 / 0,75 = 8,37$ rad s⁻¹.

l'amplitude Y_m est égale à 0,04 m.

l'équation différentielle peut s'écrire : $y'' = -\omega^2 y$

fonction linéaire décroissante de coefficient directeur $-\omega^2$.

déterminer ce coefficient à partir du graphique : $-4 / 0,06 = -66,66$

d'où $\omega = 8,16$ rad s⁻¹.

valeur théorique $\omega_0^2 = k/m = 15,4 / 0,22 = 70$ soit $\omega_0 = 8,36$ rad s⁻¹

en accord avec les valeurs précédentes

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie cinétique

$$E = 0,5 ky^2 + 0,5 m y'^2$$

$$E = 0,5 k [y^2 + (m/k) y'^2] \text{ avec } \omega_0^2 = k/m$$

$$2E / k = C = [y^2 + (y'^2 / \omega_0^2)]$$

Lorsque $y = Y_m$ alors toute l'énergie est sous forme potentielle élastique.

$$E = 0,5 k Y_m^2$$

l'énergie mécanique se conserve .

$$E = 0,5 k Y_m^2 = 0,5k (y^2 + y'^2 / \omega_0^2)$$

$$C = Y_m^2 = 0,04^2 = 0,0016 \text{ m}^2$$

E en fonction du temps, fonction constante : graphe (2) avec E en ordonnée

$$C = (y^2 + y'^2 / \omega_0^2) \text{ s'écrit : } y^2 = C - y'^2 / \omega_0^2.$$

fonction affine décroissante donc graphe (1) avec y^2 en ordonnée

du fait des frottements mécaniques, l'oscillateur s'amortit; l'énergie mécanique diminue au cours du temps. Lorsque $y = Y_m$, toute l'énergie est sous forme potentielle élastique, proportionnelle à Y_m^2 .

à la date t : $E_1 = 0,5 k 0,03^2 = 0,5 * 15,4 * 0,03^2 = 6,93 \text{ mJ}$

à la date $t+T$, $E_2 = 0,5 k 0,027^2 = 0,5 * 15,4 * 0,027^2 = 5,61 \text{ mJ}$

diminution d'énergie : 1,32 mJ soit environ 19%

alors que l'amplitude ne diminuait que de 10%.

2. Corrigé sujet 2:

A l'équilibre du ressort vertical, le poids est opposé à la tension ; la tension et l'allongement sont proportionnels.

$$mg = k x$$

$$m = 0,2 \text{ kg} ; g = 10 \text{ m/s}^2 ; x = 0,1 \text{ m d'où } k = 0,2 * 10 / 0,1 = 20 \text{ Nm}^{-1}.$$

une force est équivalente au produit de la masse par une accélération.

$$[\text{N}] \text{ équivalent à } [\text{kg}][\text{m}][\text{s}]^{-2}.$$

$$\text{raideur } [\text{N}] [\text{m}]^{-1} \text{ équivalent à } [\text{kg}][\text{s}]^{-2}.$$

$$\text{masse divisée par raideur : } [\text{kg}] / [\text{kg}][\text{s}]^{-2} \text{ équivalent à } [\text{s}]^2.$$

et racine carrée (m / k) homogène à une durée en seconde.

écrire la 2 ème loi de Newton sur l'axe horizontal :

$$\vec{T} = -kx\vec{i}$$

$$-kx = m x'' \text{ soit } x'' + k/m x = 0 \text{ ou encore } x'' + \omega_0^2 x = 0 \text{ (1)}$$

$$\text{avec } \omega_0^2 = k / m = 20 / 0,2 = 100$$

$$\omega_0 = 10 \text{ radians / s et } T_0 = 2\pi / \omega_0 = 6,28 / 10 = 0,628 \text{ s}$$

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

dériver par rapport au temps pour avoir la vitesse

$$x' = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \text{ (2)}$$

dériver la vitesse par rapport au temps pour avoir l'accélération

$$x'' = -X_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$$

repport dans l'équation différentielle (1)

$$-\omega_0^2 x + \omega_0^2 x = 0 \text{ vrai pour tout } x$$

amplitude (toujours positive X_m) = 0,15 m

$$x(t=0) = 0,15 \cos(\varphi) = -0,15 \text{ donc } \varphi = \pi.$$

la vitesse initiale est nulle :

$$x'(t=0) = -0,15 \cdot 10 \sin(\pi) = 0 \text{ est bien vérifiée}$$

$$x(t) = 0,15 \cos(10t + \pi)$$

$$x' = -1,5 \sin(10t + \pi)$$

vitesse maximale : 1,5 m/s.

énergie mécanique = énergie potentielle élastique + énergie cinétique

$$E = 0,5 k x^2 + 0,5 m v^2$$

à $t=0$, pas d'énergie cinétique et $x(t=0) = -0,15$ m

$$E = 0,5 \cdot 10 \cdot (-0,15)^2 = 0,225 \text{ J}$$

la vitesse est maximale au passage à la position d'équilibre (toute l'énergie est sous forme cinétique)

c'est à dire lorsque $t = 0,25$ période $= 0,25 \cdot 0,628 = 0,157$ s

$$0,225 = 0,5 \cdot 0,2 v_{\text{maxi}}^2$$

vitesse maxi = 1,5 m/s.