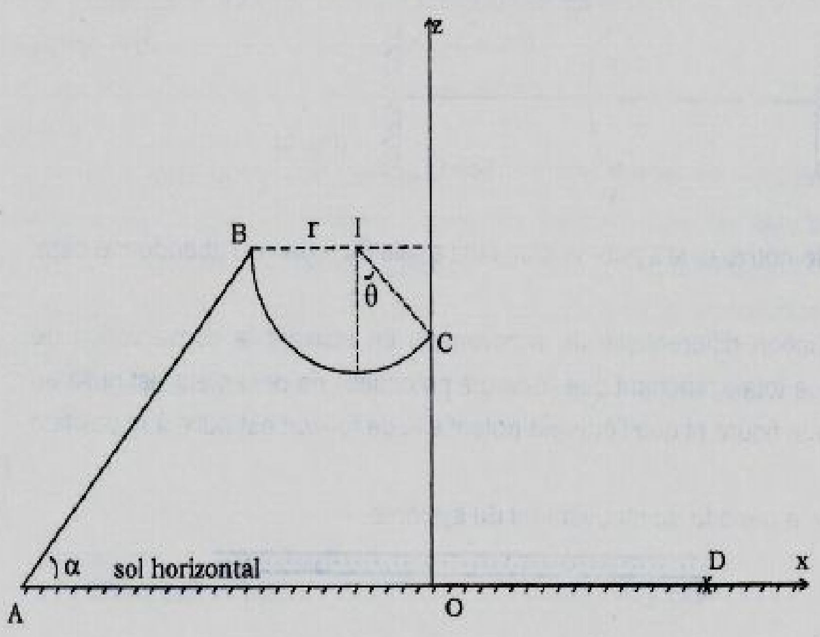
SUJETS MECANIQUE BAC D 2006 et BAC C 2008 AVEC CORRECTIONS

I -Bac D 2006

Mécanique (6 points)

A) On prendra $g = 10 ms^{-2}$.

Un solide S assimilable à un point matériel de masse m = 50 g est en mouvement sur une piste constituée d'une partie rectiligne AB inclinée d'un angle α = 60° par rapport à l'horizontale et d'une partie circulaire BC de centre I et de rayon r = 0,5 m.



3/4

1°) Le point matériel S est lancé du point A avec une vitesse initiale $V_A = 6\ ms^{-1}$.
Il arrive au point B avec une vitesse nulle. Calculer la distance AB sachant que le point matériel est soumis à une force de frottement $\vec{f}$ parallèle et de sens contraire à celui de sa vitesse à chaque instant, d'intensité constante $f = 10^{-2}$N. (1 pt)

2°) On néglige les frottements sur la partie circulaire BC.
Calculer la vitesse V_C de S au point C. Donnée : $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad (1 pt)

3°) Le point matériel S quitte la piste en C avec cette vitesse $\overrightarrow{V_C}$.
Etablir l'équation cartésienne de sa trajectoire dans le repère $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$. (1 pt)

4°) Déterminer les coordonnées du point D où le solide S touche le sol. (0,5 pt)

CORRECTION:

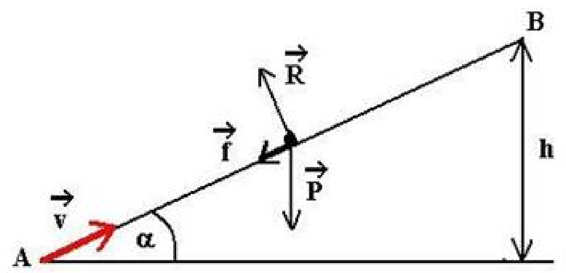
(Dans le texte, les vecteurs sont représentés par des lettres en caractère gras.

***Ex:le poids* P…)**

1-Calcul de la distance AB:

L'étude du mouvement du point est réalisée par rapport au **référentiel terrestre** galiléen.

Inventaire des forces extérieures: le poids $\vec{P}$ vertical, la force de frottement $\vec{f}$ parallèle à la pente et de sens contraire au déplacement, la réaction $\vec{R}$ normale à la pente.



Appliquons le **théorème de l'énergie cinétique**:

Rappel de l'énoncé du théorème: ***dans un référentiel galiléen la variation de l'énergie cinétique d'un solide est égale à la somme des travaux des forces appliquées au solide pendant la durée de la variation.***

Soit entre A et B: Ec(B)-Ec(A)= W($\vec{f}$) +W($\vec{P}$)+W®

$$W(\vec{F})_{A->B} = \vec{F}.\vec{AB} = \|\vec{F}\|.\|\vec{AB}\|.\cos\pi = -F.AB$$

W®=0 car $\vec{R}$ est perpendiculaire à $\vec{AB}$,

Soit **h** la dénivellation entre A et B; le travail de $\vec{P}$ ne dépend que de h et comme il est résistant,

W($\vec{P}$) =-mgh=-mgABsinα.

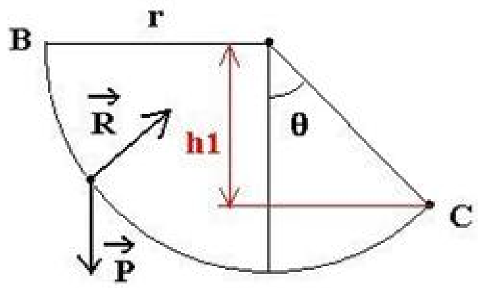
(Remarque f désigne ici l'intensité (positive) de la force)

Soit: 0 - 0.5m(v_A)^2=AB(-mgsinα-f)

D'où:

$$AB = \frac{m.(v_A)^2}{2(mg\sin\alpha + f)} = \frac{0.05*6*6}{2(0.05*10*\sin 60 + 0.01)} = 2,03m$$

2-vitesse en C:



Inventaire des forces extérieures: le poids $\vec{P}$ vertical, la réaction $\vec{R}$ normale à la pente (les frottements étant négligés).

Il est commode ici encore d'appliquer le théorème entre B et C:

Ec(C)-Ec(B)= W($\vec{R}$) +W($\vec{P}$).

Soit h_1 la dénivellation entre B et C.

Le travail de P est moteur, soit W(**P**) =+mgh_1= m.g.r.cosθ.

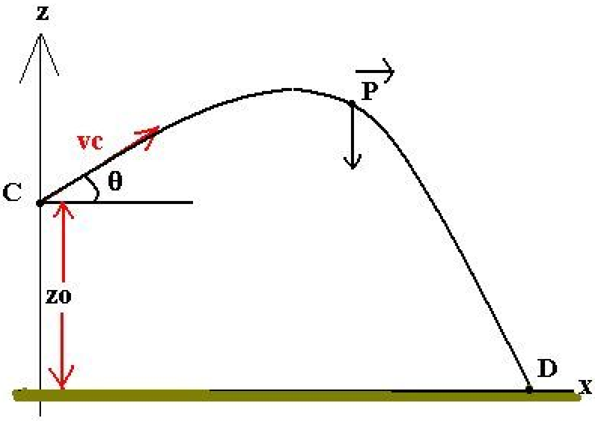
Et W($\vec{R}$)= 0 car $\vec{R}$ est perpendiculaire au déplacement à chaque instant.

L'équation précédente s'écrit:

$0,5.m.(v_c)^2$= m.g.r.cosθ, soit,

$$v_c = \sqrt{2.g.r.\cos\theta} = \sqrt{2.10.0.5.\cos(\Pi/4)} = 2,66 m.s^{-1}$$

3-Equation de la trajectoire:



Le point est soumis à la seule force $\vec{P}$, c'est une chute libre.

La relation fondamentale de la dynamique (2éme loi de Newton) s'écrit:

$$\vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} \quad (1)$$

L'accélération du point est donc constante, la trajectoire est parabolique.

Choisissons comme instant initial t=0, celui du départ du point C(0,zo) .

$$z_o = AB.\sin\alpha - r.\cos\theta = 2.02 * \sin 60 - 0.5 * \cos 45 = 0.318 m.$$

Projetons sur les deux axes la relation (1) pour obtenir les équations paramétriques:

$$\ddot{x} = 0; \qquad \ddot{z} = -g$$

Recherchons les primitives de ces fonctions, soit en tenant compte des conditions initiales du mouvement:

$$\dot{x} = v_{x0} = v_c.\cos\theta \qquad \dot{z} = -gt + v_c \sin\theta$$

Les primitives donnent:

$$x = (v_c.\cos\theta).t \ldots\ldots et \ldots\ldots\ldots z = -0.5.gt^2 + (v_c \sin\theta).t + z_o$$

En éliminant t entre les deux équations: $t = x/v_c.cosq$, on obtient l'équation de la trajectoire.

$$z = -\frac{g.x^2}{2.v_c^{\ 2}.\cos^2\theta} + x.\tan\theta + z_o = -1,41.x^2 + x + 0.318$$

4. Abscisse du point de contact D:

Posons z=0;   soit: $-1.41\ x^2+x+0.318=0$.

x_D est la racine positive de l'équation soit : $x_D=+0.95m$

II- Bac C 2008 (6 pts)

Dans tout le problème, on néglige les frottements et on prend pour l'intensité de pesanteur g = 10 m s^{-2}.

Un pendule simple est constitué par une bille ponctuelle M_1 de masse m_1= 200 g suspendue au bout d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ = 0,9 m.

1) On écarte le pendule d'un angle α par rapport à sa position d'équilibre verticale et on le lâche sans vitesse initiale. La vitesse de la bille M_1 lors de son passage à la position d'équilibre est v = 3 $m.s^{-1}$. Calculer la valeur de l'angle α.   (0,50 pt)

2) Lors de son passage à la position d'équilibre la bille M_1 heurte, au cours d'un choc parfaitement élastique, une autre bille ponctuelle M_2 immobile de masse m_2 = 100 g. (figure 2). La vitesse de la bille M_2, juste après le choc, est v_A = 4 $m.s^{-1}$. Calculer la vitesse de la bille M_1 juste après le choc en appliquant la conservation de la quantité de mouvement. (0,50 pt)

3) La bille M_2 est propulsée avec la vitesse V_A sur une piste qui comporte trois parties: (figure 2)

- Une partie horizontale AB,
- Une certaine courbe BC,
- Un arc de cercle CD, de rayon r et de centre O.

Les points O, A, B et E se trouvent dans un même plan horizontal.

a) Exprimer, en fonction de g, r, β et v_A, la vitesse de la bille M_2 au point I. (1,00 pt)

b) Exprimer, en fonction de m_2, g, r, β et v_A, l'intensité de la réaction de la piste sur la bille M_2 au point I. (1,50 pt)

c) La bille M_2 arrive au point D avec une vitesse horizontale de valeur v_D = 1 $m.s^{-1}$. Calculer la valeur de r. (0,50 pt)

4) Arrivée au point D, la bille M_2 quitte la piste avec la vitesse $\overrightarrow{v_D}$ précédente et tombe en chute libre. (Figure 2).

a) Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire de la bille M_2 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (1,5pt)

b) Calculer la distance OE. (0,5pt)

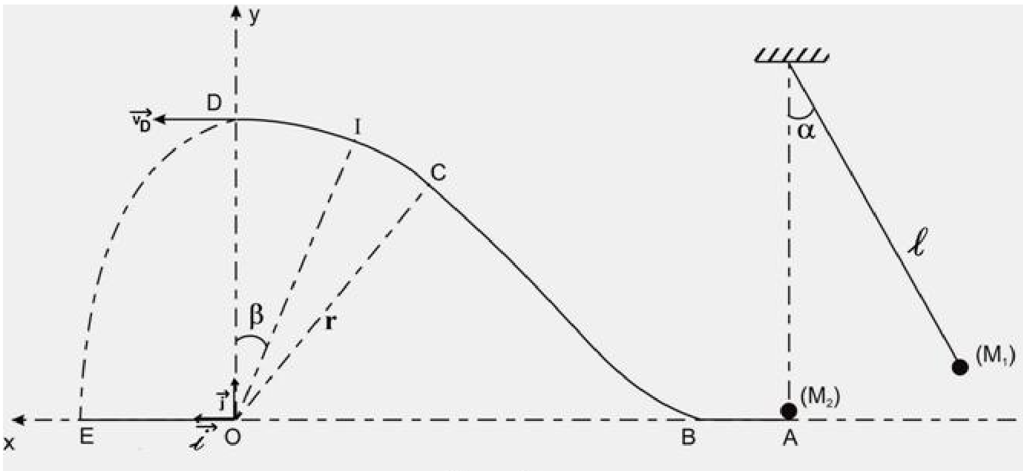
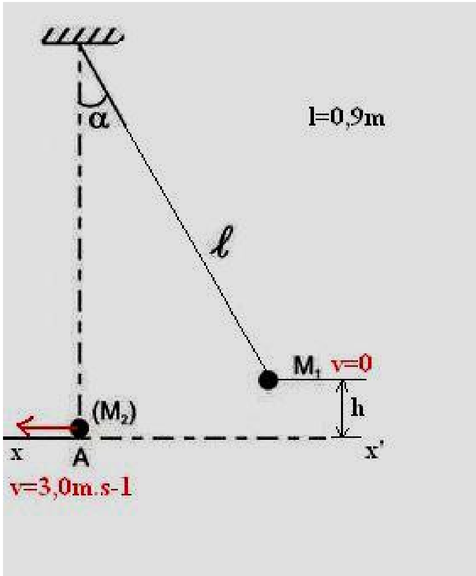


Figure 2

=====================

CORRECTION

1-calcul de l'angle a:



Dans le texte ci-dessous, la longueur du fil sera notée: L

Je propose ici une solution énergétique.

Considérons deux états du système déformable {bille, Terre}

Etat 1: bille en M_1, vitesse v=0, hauteur y=h, énergie potentielle de pesanteur du système: Ep(1)=mgh (si l'on prend le niveau x'x comme référence), énergie cinétique Ec(1)=0

Etat 2: bille en M_2, vitesse v=3m/s, hauteur y=0, Ep(2)=0, Ec(2)=1/2.m_1.v^2.

Les frottements étant négligés, appliquons le théorème de conservation de l'énergie mécanique:

Ep(1) + Ec(1)=Ep(2) + Ec(2)

En remarquant que: h= L-L.cosα= L(1-cosα), il vient:

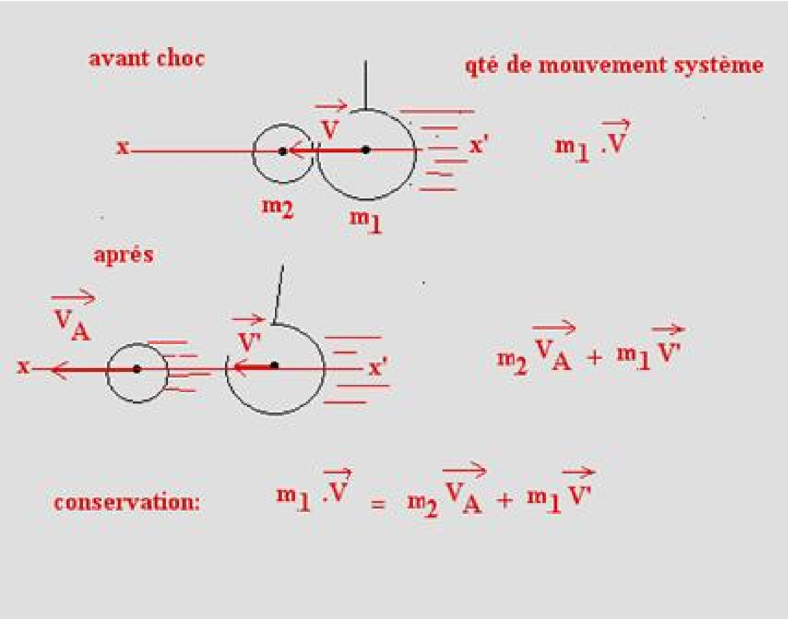
$$m_1 gL(1-\cos\alpha)=1/2.m_1.v^2.$$

et en simplifiant par m_1:

$$\boxed{\cos\alpha = 1-\frac{v^2}{2gL} = 1-\frac{3^2}{2.10.0,9} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 60°}$$

2-vitesse de la bille m_1 juste après le choc:

Le système des deux boules étant isolé au moment du choc, il y a conservation de sa quantité de mouvement totale:



Projetons cette relation sur l'axe x'x: m_1 V= $m_2.V_A+m_1.V'$, soit:

$$\boxed{V' = V - \frac{m_2}{m_1}.V_A = 3 - \frac{100}{200}4 = 1\,m/s}.$$

3-a Vitesse en I:

L'énergie mécanique du système {bille/Terre} est conservée lors du mouvement, et donc:

$$E_C(A) + E_P(A) = E_C(I) + E_P(I) \quad (1)$$

L'état de référence choisi du système est celui où la bille se trouve au niveau de l'axe x'x et donc **E_P(A)=0**, la relation(1) s'écrit alors:

$$½.m_2 V_A{}^2 = ½.m_2 V_I{}^2 + m_2.g.h(I) \quad \text{avec } h(I) = r.\cos\beta.$$

Et en simplifiant par m_2: $V_A{}^2 = V_I{}^2 + 2.g.r.\cos\beta$, soit

$$\boxed{V_I = \sqrt{V_A{}^2 - 2.g.r.\cos\beta}} \quad (2)$$

-b Intensité de la réaction en I :

Les forces appliquées sur la bille sont: **le poids** et **la réaction de la piste** (normale à la trajectoire en l'absence de frottement). Elles sont représentées sur le schéma ci-dessous.

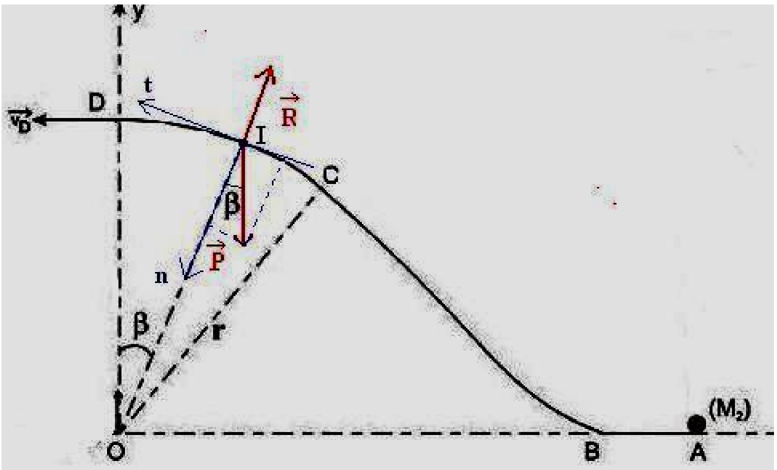
Le théorème du mouvement du centre d'inertie appliqué à la bille s'écrit:

$$\vec{P} + \vec{R} = m_2.\vec{a}$$

Projetons cette relation sur l'axe **In normal à la trajectoire** et orienté vers O.

Comme la trajectoire est circulaire, la composante normale de l'accélération est :

$$a_n = V_I^2 / r$$



$$-R + m_2.g.\cos\beta = m_2.\frac{V_I^{\ 2}}{r}$$

En tenant compte de la relation (2) précédente,

$$\boxed{R = m_2.g..\cos\beta - \frac{m_2}{r}(V_A^{\ 2} - 2gr\cos\beta g = m_2(3.g.\cos\beta - \frac{V_A^{\ 2}}{r})}$$

c-calcul de r:

Le théorème de conservation de l'énergie entre A et D permet d'écrire:

$$\frac{1}{2}m_2.V_D^{\ 2} + m_2.g.r = \frac{1}{2}m_2V_A^{\ 2}$$

D'où l'on tire:

$$r = \frac{V_A^{\ 2} - V_D^{\ 2}}{2g} = \frac{4^2 - 1^2}{2.10} = 0.75m$$

4-a Equation cartésienne de la trajectoire:

La bille est soumise uniquement à son poids, elle est en chute libre.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on a:

$$\vec{P} = m_2\vec{g} = m_2\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

L'accélération verticale est donc constante.

Précisons les conditions initiales: à t=0, $V_{xo}=V_D=1{,}0$m/s ,$V_{yo}=0$ (car la vitesse est horizontale) , $y=y_o=0{,}75$m et $x=x_o=0$..

Compte tenu de celles-ci, les équations paramétriques du mouvement s'écrivent:

$$a_x = \ddot{x} = 0$$

$$a_y = \ddot{y} = -g$$

$$V_x = \dot{x} = V_D$$

$$V_y = \dot{y} = -g.t + V_{yo} = -g.t$$

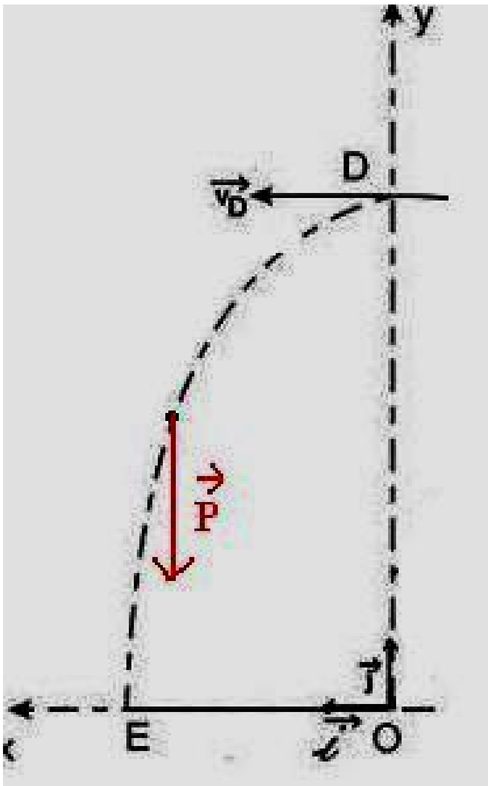
$$x = V_D.t + x_o = V_D.t$$

$$y = -\frac{g}{2.}t^2 + y_o = -\frac{g}{2}.t^2 + 0.75$$

Eliminons t entre x et y , il vient:

$$t = \frac{x}{V_D} \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}g.\frac{x^2}{V_D{}^2} + 0.75 = -5.x^2 + 0.75$$

Equation d'une parabole d'axe de symétrie Oy:



4-b Calcul de OE:

Posons y= 0, il vient $5x^2=0.75$

soit: $x=+0.39m$.

(La valeur négative: -0.39 correspond à l'abscisse du point symétrique qui ici n'a pas de signification physique).