CC BY SA

MOUVEMENT D'UN PALET

Source: **Don de l' Association Labolycée** http://labolycee.org/index.html

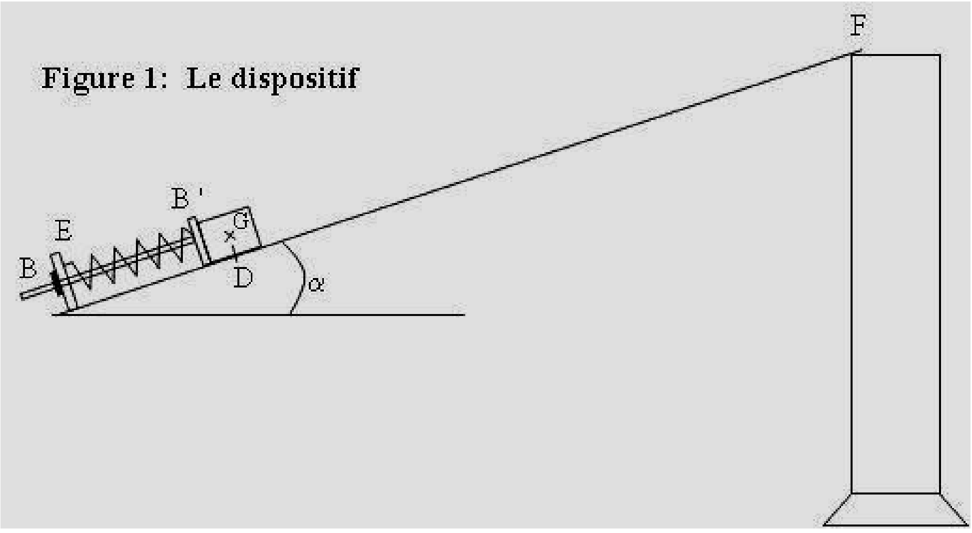
Les trois parties du problème sont indépendantes.

Les figures 1, 2 et 4 ne sont pas à l'échelle. La figure 3 est à l'échelle 1.

Intensité du champ de pesanteur au niveau du sol: g = 9,80 m.s^{-2}.

Un palet en acier de masse m = 50,0 g peut se déplacer sur une gouttière inclinée d'un angle α = 28,0° avec l'horizontale. En D, le palet passe avec une vitesse $\overrightarrow{V_D}$ acquise à l'aide d'un propulseur à ressort. En F, la gouttière est ouverte et le palet peut en sortir librement. Il tombe ensuite dans une éprouvette contenant de la glycérine.

Figure 1: Le dispositif



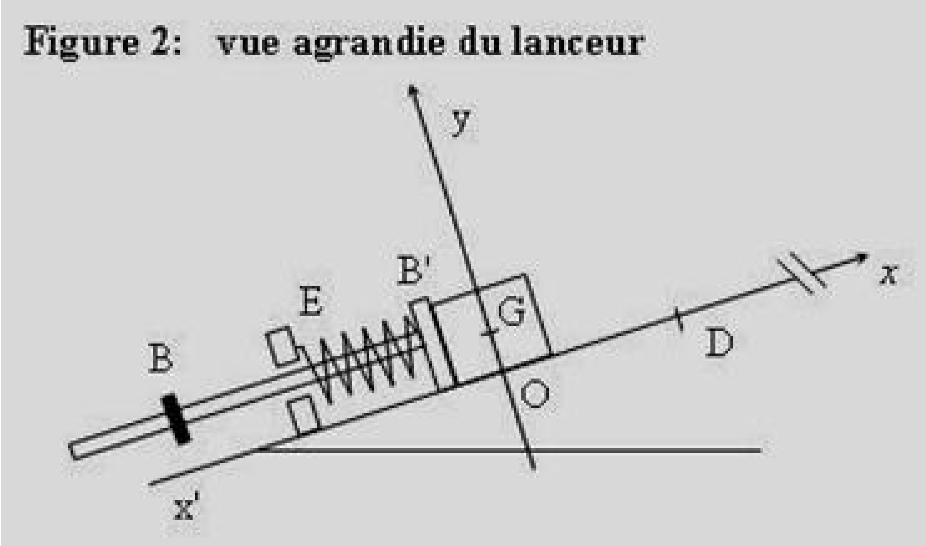
On peut considérer les frottements comme négligeables dans les parties 1 et 2, lorsque le palet glisse dans la gouttière.

Partie 1: propulsion du palet

Dans le bas de la gouttière se trouve un dispositif de propulsion constitué d'une tige munie de deux butées B et B' servant d'axe à un ressort. Le dispositif a une masse négligeable devant celle du palet. Le ressort a une longueur à vide l_0.

L'extrémité E du ressort est maintenue fixe, l'autre est libre et reste en contact avec le palet par l'intermédiaire de la butée B' tant que le ressort est comprimé.

La position du centre d'inertie G du palet est repérée sur un axe x'x de même direction que la ligne de plus grande pente de la gouttière et orienté vers le haut (**voir figure 2**).

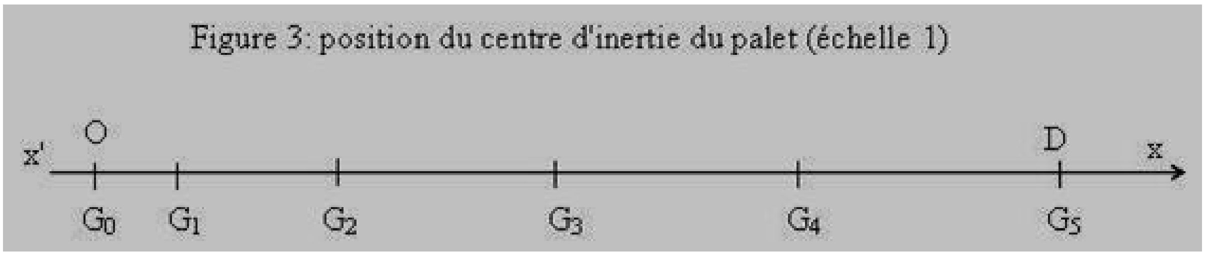


Un manipulateur tire sur la tige et comprime ainsi le ressort jusqu'à ce que le centre d'inertie du palet se trouve au point O. En lâchant la tige, il libère le dispositif qui propulse le palet.

Lorsque le centre d'inertie du palet arrive en D, la butée B bloque le mouvement du ressort qui retrouve dans cette position sa longueur à vide et libère le palet

On filme le mouvement du palet puis on exploite la vidéo avec un logiciel adapté.

La **figure 3** suivante, présente la position qu'occupe le centre d'inertie G du palet à intervalles de temps réguliers τ = 20,0 ms (points G_0 à G_5) A t = 0, le centre d'inertie du palet est au point O ou G_0 .



1.1.

En exploitant numériquement la figure 3, déterminer les vitesses V_{G2} et V_{G4} du palet aux points G_2 et G_4.

1.2.

- Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}_{G3}$ du palet au passage du point G_3 en fonction des vitesses $\vec{V}_{G4}$ et $\vec{V}_{G2}$ et de l'intervalle de temps τ.

En déduire la valeur de cette accélération a_{G3}.

1.3.

- Faire l'inventaire des forces qui s'appliquent au palet et les représenter sur un schéma.

1.4.

- En projetant la seconde loi de Newton appliquée au palet sur l'axe x'x, exprimer la valeur de la force de rappel F du ressort en fonction de m, g, a_G, α.

1.5.

A partir du résultat de 1.2. et des mesures, calculer la valeur de F au point G_3.

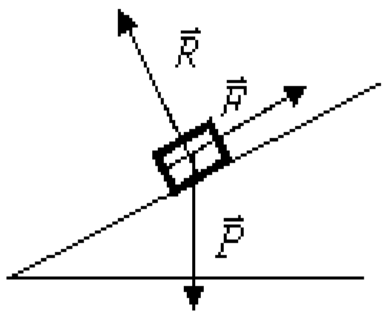
Correction partie 1 : Propulsion du palet.

1.1 . $V_{G2} = \frac{G_1G_3}{2\tau} = \frac{4{,}7.10^{-2}}{2\times 20{,}0.10^{-3}}$ = 1,2 m.s^{-1}; $V_{G4} = \frac{G_3G_5}{2\tau} = \frac{6{,}3.10^{-2}}{2\times 20{,}0.10^{-3}}$ = 1,6 m.s^{-1}

1.2. $\vec{a}_{G3} = \frac{\Delta\vec{V}_G}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_{G4} - \vec{V}_{G2}}{2\tau}$ Les deux vecteurs $\vec{V}_{G4}$ et $\vec{V}_{G2}$ ont la même direction,

donc $a_{G3} = \frac{V_{G4} - V_{G2}}{2\tau} = \frac{1{,}6 - 1{,}2}{2\times 20.10^{-3}}$ = **10 m.s^{-2}**

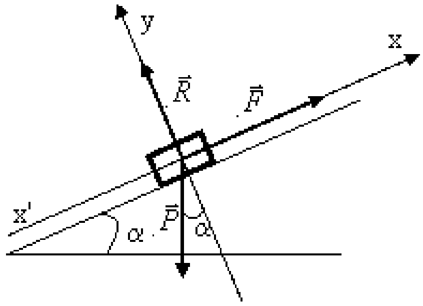
1.3. Dans le référentiel gouttière, référentiel terrestre supposé galiléen, les forces qui s'exercent sur le palet sont les suivantes:



- le poids $\vec{P}$ (direction verticale, sens vers le bas, appliqué en G)

- la réaction de la gouttière $\vec{R}$ (perpendiculaire à la glissière – pas de frottements, vers le haut, appliquée au centre de la surface de contact entre le palet et la glissière).

CC BY SA



- la force exercée par le lanceur $\vec{F}$(direction de la glissière, sens du mouvement, appliquée au centre de la surface de contact entre le palet et la butée B')

1.4.

Appliquons la deuxième loi de Newton au système {palet}:

$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$

Soit en projetant sur l'axe xx': F – m.g.sinα = m.a_{Gx}

Le vecteur accélération a pour coordonnées $\vec{a}_G$(a_{Gx} ; a_{Gy}),

$a_{Gy} = \frac{dV_y}{dt}$ or la coordonnée V_y du vecteur vitesse du palet suivant Gy est nulle et constante.

donc a_{Gy} = 0.

La norme du vecteur accélération est donc égale à $a_G = \sqrt{a_{Gx}^2 + 0}$. Soit ici $a_{Gx} = a_G$.

On obtient donc **F = m.(a_G + g.sinα)**

1.5.

$F = 50{,}0.10^{-3} \times (10 + 9{,}80 \times \sin 28)$ = **0,73 N**

Partie 2: Montée du palet dans la gouttière.

Le palet n'est plus sous l'action du propulseur et il quitte le point D avec une vitesse V_D = 2,00 m.s^{-1} puis il glisse jusqu'au point F où il s'arrête.

Dans cette partie du mouvement, on prendra la position du centre d'inertie du palet en D comme origine des altitudes (z_D = 0) et comme niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur: E_{PP}(D) = 0.

2.1.

- Faire l'inventaire des forces qui s'appliquent au palet sur le trajet DF et les représenter sur un schéma.

2.2.

- Donner l'expression au point D de l'énergie mécanique $E_M(D)$ du palet en translation dans le champ de pesanteur.

2.3.

- Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_M(F)$ du palet au point F, en fonction de m, g, α et de la distance DF.

2.4.

-Montrer que sur le trajet DF, l'énergie mécanique du palet en translation dans le champ de pesanteur se conserve. En déduire la valeur de la distance DF.

Correction partie 2: montée du palet dans la gouttière.

2.1.

Sur le trajet DF, le ressort n'agit plus sur le palet, les forces s'exerçant sur celui-ci sont:

- le poids $\vec{P}$

- la réaction de la gouttière $\vec{R}$

2.2.

$E_M(D) = E_C(D) + E_{PP}(D)$

Le point D sert de référence pour l'énergie potentielle: $E_{PP}(D)= 0$

$\mathbf{E_M(D) = E_C(D) =} \frac{1}{2}mV_D^2$

2.3.

$E_M(F) = E_C(F) + E_{PP}(F)$ $V_F = 0$ donc $E_C(F) = 0$

$\mathbf{E_M(F)} = E_{PP}(F) = m.g.z_F = \mathbf{m.g.DF.sin\alpha}$

2.4.

Pour un solide en translation, $\Delta E_C = E_C(F) - E_C(D) = \Sigma W_{D\to F}(\vec{F}_{ext})$

soit $-E_C(D) = W_{D\to F}(\vec{P}) + W_{D\to F}(\vec{R})$

$$-\frac{1}{2}.m.V_D^2 = \vec{P}\cdot\vec{DF} + \vec{R}\cdot\vec{DF}$$

$$-\frac{1}{2}.m.V_D^2 = m.g.DF.\cos(90+\alpha) + R.DF.\cos 90$$

$$-\frac{1}{2}.m.V_D^2 = -\, m.g.DF.\sin\alpha + 0$$

$$\frac{1}{2}.m.V_D^2 = m.g.DF.\sin\alpha$$

On trouve que $E_M(D) = E_M(F)$. L'énergie mécanique s'est conservée au cours du mouvement de D à F.

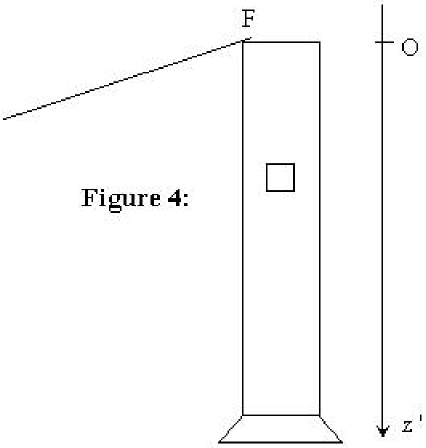
En déduire la valeur de la distance DF ?

DF = $\frac{1}{2g\sin\alpha}\times V_D^2 = \frac{1}{2\times 9,80\times \sin 28}\times 4,00$ = **0,435 m**

Partie 3: Chute du palet sans vitesse initiale.

En F, le palet poursuit son mouvement en réalisant une chute verticale (sans vitesse initiale) dans une éprouvette contenant de la glycérine (**voir figure 4 page suivante**). On admettra que dans ce cas, le palet est soumis à une force de frottement fluide, modélisée par un vecteur $\vec{f}$ de même direction que le vecteur vitesse $\vec{V}$ mais de sens opposé et de valeur f = k.V, k étant une constante positive.

Figure 4:



3.1.

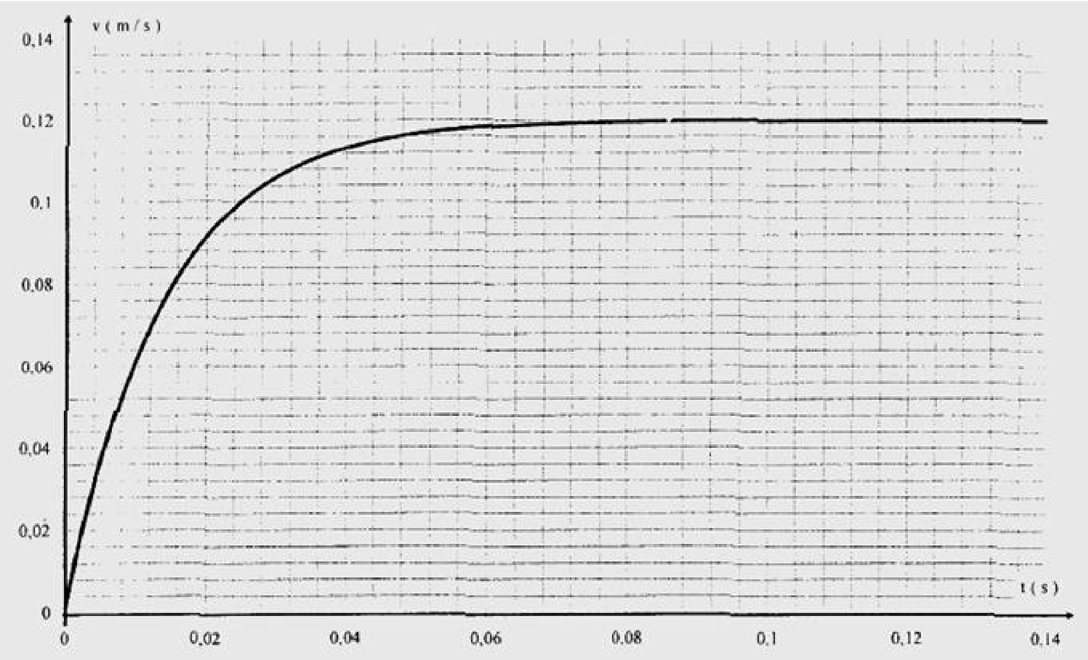
- Faire l'inventaire des forces qui s'appliquent sur le palet pendant sa chute dans la glycérine et les représenter sur un schéma.

3.2.

- En appliquant la seconde loi de Newton, montrer que le mouvement du centre d'inertie du palet obéit à une équation différentielle du type $\frac{dV}{dt} = A - BV$. Donner les expressions littérales de A et B en fonction des données du texte, de la masse volumique ρ de la glycérine et du volume V_{0l} du palet

3.3.

- En utilisant le graphe V = f(t) suivant, calculer numériquement les valeurs de A et B en justifiant votre démarche.



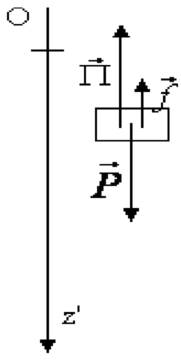
Correction partie 3: Chute du palet sans vitesse initiale.

3.1.

Le palet est maintenant en chute verticale dans la glycérine, les forces qui s'exercent sur lui sont :

- le poids $\vec{P}$
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ (direction verticale, sens vers le haut, appliquée en G)
- la force de frottement fluide modélisée par $\vec{f}$ (direction verticale, sens vers le haut, appliquée en G)

Remarque: pour plus de visibilité les points d'application des forces sont décalés sur le schéma.



3.2.

Appliquons la seconde loi de Newton au palet:

$$\vec{P} + \vec{f} + \vec{\Pi} = m.\vec{a}_G = m.\frac{d\vec{V}}{dt}$$

En projetant sur l'axe Oz' vertical: $P - f - \Pi = m.\frac{dV}{dt}$

CC BY SA

On note m_{gly} la masse de glycérine déplacée par le palet

Soit $m.g - k.V - m_{gly}.g = m.\frac{dV}{dt}$

$m \times g - k \times V - \rho.V_{0l}.g = m\,\frac{dV}{dt}$

$$\frac{(m - \rho.V_{0l}).g}{m} - \frac{k}{m}.V = \frac{dV}{dt}$$

Soit: A + B.V=dV/dt

3.3.

On ne connaît pas le volume du palet donc on ne peut pas calculer A avec l'expression littérale obtenue précédemment. Utilisons une autre méthode:

Quand t = 0, V = 0, on alors A = $\frac{dV}{dt}$ ce qui correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de V = f(t) à t = 0.

Soit le point $M(t_M = 0{,}004\ ;V_M = 0{,}032)$ appartenant à la tangente

$A = \frac{V_M}{t_M} = \frac{0{,}032}{0{,}004} = 8\ m.s^{-2}$

Quand t > 60 ms, $V = V_{lim}$ = Cte, alors $\frac{dV}{dt} = 0$

$A - B \times V_{lim} = 0$

$B = \frac{A}{V_{lim}} = \frac{8}{0{,}12}$

$B = 67\ s^{-1}$