Séquence 2 : Équations du second degré dans IR

1. Définition et vocabulaire

Une **équation du second degré**, à une inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$, où a, b et c sont des réels donnés avec $a\neq 0$.

Exemples :

- $3x^2+4x-1=0$ est une équation du second degré.
- $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$ en est aussi.
- Mais $x^2-2x+5=(x+1)(x-2)$ n'en est pas.

2. Résolution de l'équation du second degré

Résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$, c'est trouver tous les nombres u tels que $au^2+bu+c=0$. Un tel nombre est dit solution ou encore **racine de l'équation**.

2.1 Démarche

Posons $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.

Étape 1 : Écriture de f(x) sous forme canonique.

Puisque $a\neq 0$, $f(x)=a[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}]=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}]$

$$f(x)=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]$$

Étape 2 : Résolution de f(x) = 0.

On pose $\Delta=b^2-4ac$. Ainsi $f(x)=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}]$. Il y a trois cas à distinguer :

- $\Delta<0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2}<0$. Le nombre entre crochet est strictement positif. L'équation f(x) = 0 n'a pas de solution.
- $\Delta=0$, alors $f(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2$. Puisque $a\neq 0$, l'équation a une et une seule solution $x=-\frac{b}{2a}$
- $\Delta>0$, alors $\Delta=\sqrt{\Delta}^2$. $f(x)=a(x-x')(x-x'')$, avec $x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

L'équation a deux solutions distinctes : S = { x' ; x''}.

Le nombre $\Delta=b^2-4ac$ est appelé **discriminant** de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$, ou du trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$.

2.2 Méthode

Pour résoudre $ax^2+bx+c=0$, on calcule $\Delta=b^2-4ac$.

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
L'équation est impossible. **On écrit :** S = Ø	**Il y a une racine double :** x' = x'' = - $\frac{b}{2a}$ S = {x'}	**Il y a 2 racines distinctes :** $x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ S= { x' ; x'' }

2.3 Exercices résolus

Résoudre dans IR les équations suivantes :

$x^2-3x+4=0$	$3x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{48}=0$	$3x^2-x-4=0$
a = 1, b = - 3, c = 4 $\Delta=(-3)^2-4\times1\times4=-7$ $\Delta<0$, pas de solution. $S=\emptyset$	$a=3,\ b=-\frac{7}{2},\ c=\frac{49}{48}$ $\Delta=(-\frac{7}{2})^2-\frac{4\times3\times49}{48}=0$ $x=-\frac{b}{2a}=\frac{7}{12}$ S = { $\frac{7}{12}$ }	a = 3, b = - 1, c = -4 $\Delta=(-1)^2-4\times3\times(-4)=49$ $x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-1$ et $x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4}{3}$ S = { -1; $\frac{4}{3}$ }