Séquence 1 : Équations et inéquations homographiques

1. Signes du binôme

1.1 Signe de x - c

L'expression x - c est négative si x < c, positive si x > c ou nulle pour x = c. On peut résumer ces résultats dans un tableau appelé tableau de signe.

x	$-\infty$	c	$+\infty$
x - c	−	0	+

1.2 Signe de a x + b

Comme $ax+b=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$, $ax+b$ a même signe que a si $x>-\frac{b}{a}$ ou du signe de l'opposé de a si $x<-\frac{b}{a}$. On peut résumer ces résultats dans un tableau de signe.

x	$-\infty$	$\frac{b}{a}$	$+\infty$
ax+b	Signe de (-a)	0	Signe de (a)

Exemple :

Dresser le tableau de signes de -2x+5.

-2x+5 = 0 si $x=\frac{5}{2}$. Ici, a = -2 donc le signe de a est négatif . On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
-2x+5	+	0	−

1.3 Signes du produit de deux binômes

Exemples :

1) Dresser le tableau de signes de $T_1(x)=x^2-9$.

$x^2-9=(x-3)(x+3)$, donc $x^2-9=0$ si x = - 3 ou x = 3

x	$-\infty$	-3		+3	$+\infty$
x + 3	−	0	−		+
x - 3	−		+	0	+
$T_1(x)$	+	0	−	0	+

2) Dresser le tableau de signes de $T_2(x)=(2x+1)(-5x+3)$

$T_2(x)$ = 0 si $(2x+1)(-5x+3)=0$. On en déduit alors $(2x+1)=0$ ou $(-5x+3)=0$, ce qui donne $x=-\frac{1}{2}$ ou $x=\frac{3}{5}$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$+\infty$
2x + 1	−	0	+		+
-5x + 3	+		+	0	−
$T_2(x)$	−	0	+	0	−

Dans le cas général :

$T(x)=(ax+b)(cx+d)=ac(x+\frac{b}{a})(x+\frac{d}{c})$. Ainsi, T(x) = 0 si $x=-\frac{b}{a}$ ou $x=-\frac{d}{c}$.

On a alors le tableau de signes suivant (en supposant que $-\frac{b}{a}<-\frac{d}{c}$) :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$		$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
ac	Signe de ac		Signe de ac		Signe de ac
$x+\frac{b}{a}$	−	0	+		+
$x+\frac{d}{c}$	−		−	0	+
T(x)	Signe de ac	0	Signe de (-ac)	0	Signe de ac

2. Équations associées aux fonctions homographiques

Soit $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$. Pour résoudre f(x) = 0, il faut d'abord déterminer son ensemble de définition puis résoudre $ax+b=0$. $\frac{ax+b}{cx+d}=0$ si $ax+b=0$ et $cx+d\neq 0$.

L'ensemble des solutions est : $S=\{-\frac{b}{a}\}$.

Exemples :

1) Résoudre dans IR : $\frac{2x+3}{4x-6}=0$.

$\frac{2x+3}{4x-6}=0$ si $2x+3=0$ et $4x-6\neq 0$. $x=-\frac{3}{2}$ et $x\neq\frac{3}{2}$ donc $S=\{-\frac{3}{2}\}$.

2) Soit $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$.

i- Déterminer l'ensemble de définition de f.

ii- Déterminer les coordonnées du point A , intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses.

i- On a D_f = IR \ {2}.

ii- L'abscisse de ce point est la solution de f(x) = 0. Après calcul, on trouve x = -3; d'où A (-3 ; 0).

3. Inéquations associées aux fonctions homographiques

3.1 Tableau de signes de $\frac{ax+b}{cx+d}$

Soit $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$. On peut écrire $f(x)=\frac{a(x+\frac{b}{a})}{c(x+\frac{d}{c})}$.

La forme générale est donc la suivante (on suppose que $-\frac{b}{a}<-\frac{d}{c}$) :

x	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{a}$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$\frac{a}{c}$	Signe de $\frac{a}{c}$	Signe de $\frac{a}{c}$	Signe de $\frac{a}{c}$
$x+\frac{b}{a}$	− $\quad$ 0	+	+
$x+\frac{d}{c}$	−	− $\quad$ 0	+
T(x)	Signe de $\frac{a}{c}$ $\quad$ 0	Signe de ($-\frac{a}{c}$) ‖	Signe de $\frac{a}{c}$

On peut utiliser alors directement le tableau suivant :

x	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{a}$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
T(x)	Signe de $\frac{a}{c}$ $\quad$ 0	Signe de ($-\frac{a}{c}$) ‖	Signe de $\frac{a}{c}$

3.2 Inéquations associées au fonction homographiques

On cherche à résoudre l'une des inéquations suivantes :

$\frac{ax+b}{cx+d}<0$; $\frac{ax+b}{cx+d}\leq 0$; $\frac{ax+b}{cx+d}\geq 0$ ou $\frac{ax+b}{cx+d}>0$.

Étape 1 : On dresse le tableau de signe de $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Étape 2 : On hachure les colonnes qui contiennent les signes ne répondant pas à l'inégalité.

Étape 3 : On écrit la solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

Exemple :

Résoudre dans IR : $\frac{x+1}{x-2}<0$.

Étapes 1 et 2 : On fait le tableau de signe de $\frac{x+1}{x-2}$ et on élimine les colonnes avec les signes ne répondant pas à la question. On a $a=1$, $c=1$ et $\frac{a}{c}=1$, qui a un signe positif.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
T(x)		+	0	−	‖	+	

Étape 3 : S =] -1 ; 2[