Séquence 1 : Dénombrement

1. Langage des ensembles

1.1 Ensemble fini

Un ensemble est **fini** si on peut compter ses éléments. Le **cardinal** d'un ensemble fini E noté card E désigne le nombre de ses éléments. Si E possède n éléments, card E = n.

Exemple : A = {1, 2, 3, a, b, c} donc card A = 6.

1.2 Intersection de deux ensembles finis

L'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et B est **l'intersection** de A et B et noté $A \cap B$.
A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

$$A \cap B = \{ x,\ x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \}$$

Exemple :

A = {1, 2, 3, a, b, c}, B = { 2, 5, 7, a, e, f, q } donc $A \cap B = \{ 2,\ a \}$.

1.3 Réunion de deux ensembles finis

Soient A et B deux ensembles. La **réunion** de A et B notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B.

$$A \cup B = \{ x,\ x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B \}$$
$$\text{card}\, A \cup B = \text{card}\, A + \text{card}\, B - \text{card}\, A \cap B$$

Exemple :

A = {1, 2, 3, a, b, c}, B = { 2, 5, 7, a, e, f, q } ; $A \cup B$ ={ 1, 2, 3, 5, 7, a, b, c,e, f, q }

1.4 Produit cartésien de deux ensembles finis

Soient A et B deux ensembles finis. Le **produit cartésien** de A et B, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples (x ; y) tels que $x \in A$ et $y \in B$.

$$A \times B = \{ (x, y) / x \in A \quad \text{et} \quad y \in B \}$$
$$\text{card}\, A \times B = \text{card}\, A \times \text{card}\, B$$

1.5 Règle du produit

Si on peut choisir un objet A de n façons, puis un objet B de p façons ; alors on peut choisir A puis B de $n \times p$ façons.

Exemple :

Pour son goûter, Rivo a droit à un sachet de biscuits parmi les six proposés et un verre de jus naturel à choisir parmi quatre variétés. Quel est le nombre de choix possibles ?

Il y a en tout 24 choix possibles.

1.6 p- listes ou p-uplets

Soit E un ensemble fini tel que card E = n.

- L'ensemble des couples d'éléments de E est noté **E² :** $E^2 = E \times E$.
- L' ensemble des éléments de $E^2 \times E = E^3$ est appelé **l'ensemble des triplets**.
- Plus généralement, on appelle **p-liste** ou **p-uplet** un élément de E^p.

Card $(E^p) = n^p$.

1.7 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre

Soient E et F deux ensembles finis. n=card E et p=card F.

Le nombre d'applications de F vers E est $N = n^p$.

Exemple :

On veut ranger trois livres dans cinq casiers. Chaque casier peut contenir 0, 1, 2 ou 3 livres. Quel est le nombre de rangements possibles ?
$N = 3^5$

2. Problème de dénombrements

2.1 Arrangements dans un ensemble fini

Soit E un ensemble fini non vide tel que card E = n. Un **arrangement** sans répétition de p éléments de E est un p-uplet de E formé par des éléments deux à deux distincts.

Le nombre d'arrangements sans répétition d'éléments de E est $N = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-p+1)$.

Exemple :

Si 20 chevaux participent à une course, quel est le nombre de tiercés possibles dans l'ordre ? (on suppose qu'il n'y a pas d'ex-aequo).

Soit N ce nombre. N = 20 (20 - 1) (20 - 2) = 840.

2.2 Permutations dans un ensemble fini

Soit E un ensemble de cardinal n. Une **permutation** de E est une bijection de E vers E. C'est aussi un arrangement de n éléments de E.

Le nombre de permutation d'éléments de E est N = n (n - 1) (n - 2) … 3 . 2 . 1

Exemple :

Combien de nombres à trois chiffres peut-on former avec les chiffres 2, 4 et 5 ?

N = 3x2x1 = 6. (245,254,425, 452, 524, 542)

2.3 Combinaisons dans un ensemble fini

Soit E un ensemble de cardinal n. Une **combinaison** de p éléments de E est une partie ou un sous-ensemble de E à p éléments.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est $N=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{n(n-1)(n-2)...3.2.1}$.

3. Les nouveaux nombres

3.1 Le nombre factorielle

Pour tout entier naturel n, on définit le nombre **factorielle n**, noté n!, par :

0! = 1

Pour n ≠ 0, n! = n (n - 1) (n - 2)…3.2.1

Exemples :

1! =1 3! = 3x2x1 = 6 7! = 7x6x5x4x3x2x1 = 5040

3.2 le nombre A_n^p

Pour tout entier naturel n et p $(p \leq n)$, on définit ce nombre par :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

En simplifiant : $A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$

3.3 Le nombre C_n^p

Pour tout entier naturel n et p $(p \leq n)$, on définit ce nombre par :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

En simplifiant : $C_n^p = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}$

On a : $C_n^p = C_n^{n-p}$

3.4 Remarques

Avec ces nouveaux nombres :

- A_n^p est le nombre d'arrangement sans répétition ;
- n! est le nombre de permutation ;
- C_n^p est le nombre de combinaison.