Séquence 2 : Fonctions rationnelles

1. Asymptotes

1.1 Branches infinies

La courbe représentative d'une fonction f admet une **branche infinie** si l'une des coordonnées d'un point M(x,y) de cette courbe peut tendre vers l'infini, c'est-à-dire si on a l'un des cas suivants :

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} f(x) = l, \quad \lim_{x\to x_a} f(x) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

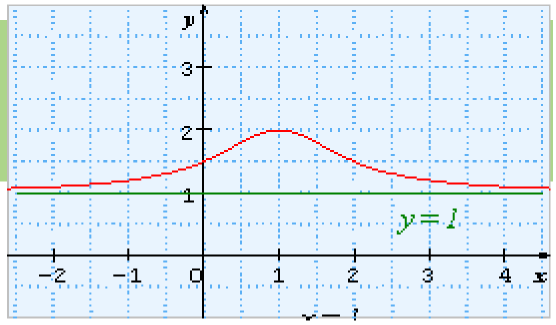
1.2 Asymptotes

1.2.1 Définition

Une droite (D) est une **asymptote** à la courbe (C) si la distance d'un point M(x ; y) de la courbe à la droite D tend vers 0 quand M s'éloigne indéfiniment sur la branche infinie.

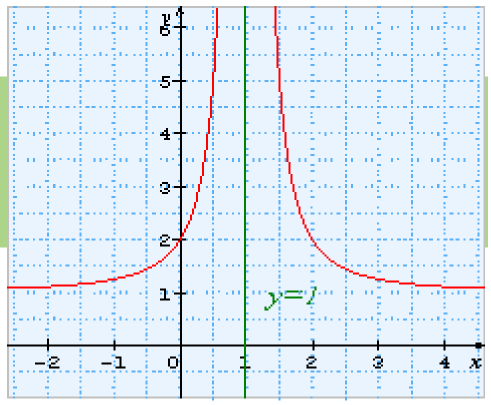
1.2.2 Asymptote horizontale

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, alors la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f.



1.2.3 Asymptote verticale

Si $\lim_{x\to x_a} f(x) = \infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.



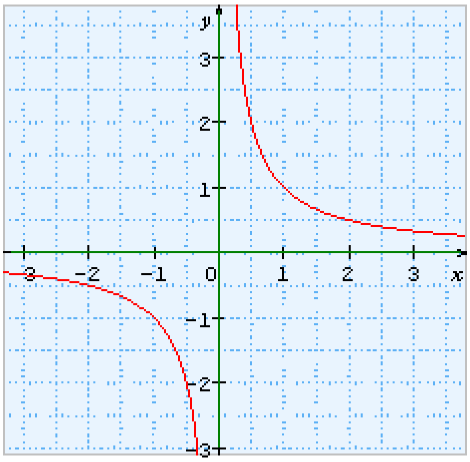
2. Fonctions homographiques : $\mathbf{f}(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ avec $c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$

2.1 Premier exemple : $\mathbf{f_1}(x)=\frac{1}{x}$

- Domaine de définition : $D_{f_1}=]-\infty;0[\ \cup]0;+\infty[$
- Parité : $f_1(-x)=-f_1(x)$ donc f est impaire et on peut réduire D_e à $D_e=]0;+\infty[$.
- Limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x)=+\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote parallèle à (y'Oy)

  et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x)=0$ donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote parallèle à (x'Ox).
- Dérivée : $f_1(x)=-\frac{1}{x^2}$
- Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f_1'(x)	-	‖	-
f_1	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0

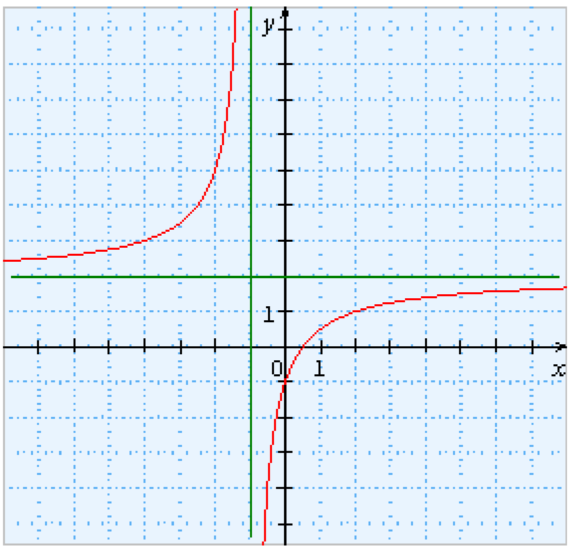


- Courbe représentative ci-contre :

2.2 Second exemple : $\mathbf{f_2}(x)=\frac{2x-1}{x+1}$

À faire en exercice :

- Déterminer le domaine de définition de f_2 ;
- Chercher une éventuelle parité de la fonction ;
- Déterminer ses asymptotes ;
- Construire son tableau de variations ;
- Reconstruire sa courbe représentative avec ses asymptotes.



3. Fonctions du type : $\mathbf{g}(x)=\frac{a x^2+b x+c}{a' x^2+b' x+c'}$ *avec* $a'\neq 0$

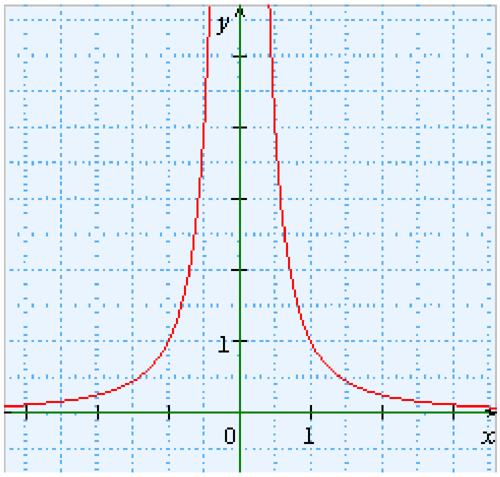
3.1 Premier exemple : $\mathbf{g_1}(x)=\frac{1}{x^2}$

- Domaine de définition : $D_{g_1}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
- Parité : $g_1(-x)=g_1(x)$ donc g est paire et on peut réduire D_e à $D_e=]0;+\infty[$.
- Limites : $\lim_{x\to 0^+} g_1(x)=+\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote parallèle à (y'Oy)

  et $\lim_{x\to+\infty} g_1(x)=0$ donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote parallèle à (x'Ox).
- Dérivée : $g_1(x)=-\frac{2}{x^3}$
- Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_1'(x)$	+	‖	-
g_1	0 ↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0

- Courbe représentative ci-contre :



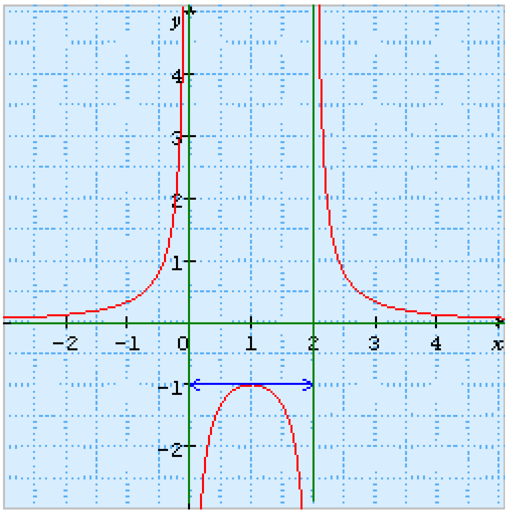
3.2 Deuxième exemple : $\mathbf{g_2}(x)=\frac{1}{x^2-2x}$

- Domaine de définition : $D_{g_2}=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$
- Parité : $g_2(-x)\neq g_2(x)$ et $g_2(-x)\neq -g_2(x)$ donc g est ni paire ni impaire.
- Limites :
  - $\lim_{x\to+\infty} g_2(x)=0$ et $\lim_{x\to-\infty} g_2(x)=0$ donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote parallèle à (x'Ox) ;
  - $\lim_{x\to 0^-} g_2(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} g_2(x)=-\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote parallèle à (y'Oy) ;
  - $\lim_{x\to 2^-} g_2(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to 2^+} g_2(x)=+\infty$ donc la droite d'équation x = 2 est une asymptote parallèle à (y'Oy).

- Dérivée : $g_2'(x)=\dfrac{2(x-1)}{(x^2-2x)^2}$

- Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
2(x-1)		-		-	0	+		+	
$(x^2-2x)^2$		+	0	+		+	0	+	
$g_2'(x)$		+	‖	+	0	-	‖	-	
g_2	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0



- Courbe représentative ci-contre :

3.3 Troisième exemple : $g_3(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

À faire en exercice :

- Déterminer le domaine de définition de g_3 ;
- Chercher une éventuelle parité de la fonction ;
- Déterminer ses asymptotes ;
- Construire son tableau de variations ;
- Reconstruire sa courbe représentative avec ses asymptotes