Séquence 2a : Étude de fonctions polynomiales

1. Premier exemple : $f_1(x)=x^2$

- Domaine de définition : $D_{f_1}=]-\infty;+\infty[$

- Parité : $f_1(-x)=(-x)^2=x^2=f_1(x)$ donc f_1 est paire et $D_e=[0;+\infty[$

- Limites : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty \end{cases}$

- Dérivée : $f_1'(x)=2x$

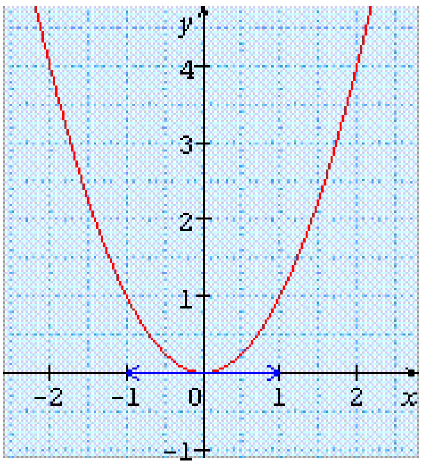
- Tableau de variations : $f_1'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$. Par parité, on obtient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		-	0	+	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_1(x)$	9	4	1	0	1	4	9

- Courbe représentative :



$f_1'(0)=0$ donc on a une tangente horizontale en (0 ; 0).

2. Deuxième exemple : $f_2(x)=-x^3+3x+1$

- Domaine de définition : $D_{f_2}=]-\infty;+\infty[$

- Parité : $f_2(-x)=x^3-3x+1 \neq f_2(x)$
  $-f_2(x)=x^3-3x-1 \neq f_2(-x)$ donc f_2 est ni paire ni impaire.

- Limites : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x)=-\infty \end{cases}$

- Dérivée : $f_2'(x)=-3x^2+3$

- Tableau de variations : $f_2'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+3=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-1$

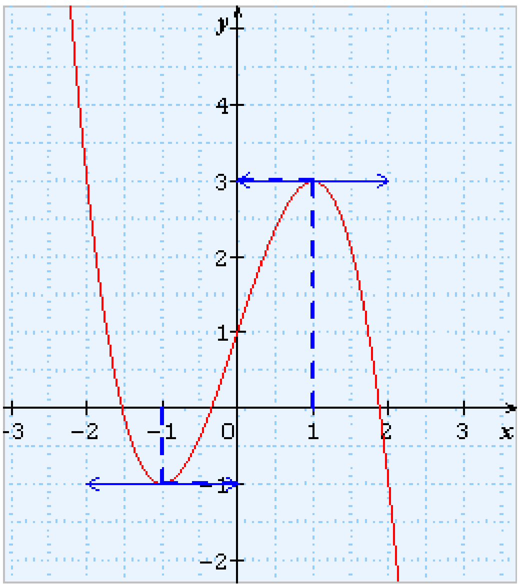
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f_2'(x)$		-	0	+	0	-	
f_2	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

- Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_2(x)$	22	3	-1	1	3	-1	20

- Courbe représentative :

$f_2'(-1)=f_2'(1)=0$ donc on a deux tangentes horizontales en (-1 ;-1) et (1 ; 3).



3. Troisième exemple : $f_3(x)=x^4-2x^2+1$

- Domaine de définition : $D_{f_3}=]-\infty;+\infty[$
- Parité : $f_3(-x)=(-x)^4-2(-x)^2+1=f_3(x)$ donc f_3 est paire et $D_e=[0;+\infty[$
- Limites : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f_3(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f_3(x)=+\infty \end{cases}$
- Dérivée : $f_3'(x)=4x^3-4x$
- Tableau de variations : $f_3'(x)=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=-1$.

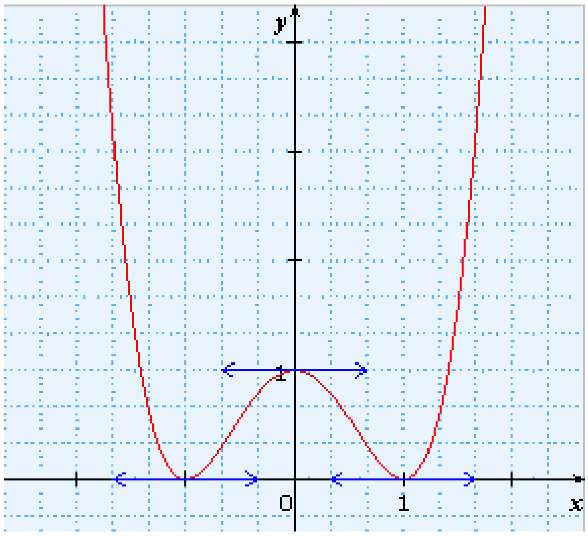
Par parité, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f_3'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
f_3	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

- Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_3(x)$	64	9	0	1	0	9	64

- Courbe représentative :



$f_3'(-1)=f_3'(0)=f_3'(1)=0$ donc on a trois tangentes horizontales en (-1 ; 0), (0 ; 1) et (1 ; 0).

4. Quatrième exemple : $f_4(x)=x^3+x$

- Domaine de définition : $D_{f_4}=]-\infty;+\infty[$

- Parité : $f_4(-x)=(-x)^3+(-x)=-(x^3+x)=-f_3(x)$ donc f_4 est impaire et $D_e=[0;+\infty[$

- Limites : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f_4(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f_4(x)=+\infty \end{cases}$

- Dérivée : $f_4'(x)=3x^2+1$

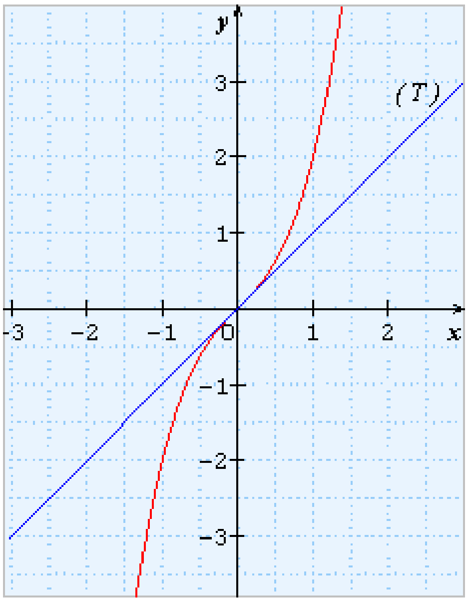
- Tableau de variations : $f_4'(x)=0$ est impossible. Par imparité, on a le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_4'(x)$		+	
f_4	$-\infty$	0	$+\infty$

- Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_4(x)$	-30	-10	-2	0	2	10	30

- Courbe représentative :



On calcule l'équation de la tangente (T) en 0 :

$(T):\ y=f_4'(0)(x-0)+f_4(0)=x$