Séquence 3 : Dérivées et étude de fonctions

1. Dérivation et continuité

Si une fonction f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

La réciproque est fausse.

2. Dérivée et sens de variations

2.1 Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.

Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.

Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

2.2 Tableau de variations

Étudier les variations d'une fonction f revient à calculer sa dérivée f' et étudier son signe.

On ajoute une ligne à ce tableau. Une ligne avec des flèches indiquant les variations de f. C'est son tableau de variations.

3. Dérivée et extremums locaux

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle]a : b[et x_0 un réel de]a : b[.

Si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0, alors f admet un **extremum local** en x_0.

Si f' change de signe de - en +, c'est un **minimum local** en x_0.

Si f' change de signe de + en -, c'est un **maximum local** en x_0.

4. Exemples

Exemples :

- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 - 3x + 1$

  1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
  2. Calculer f' et dresser son tableau de signes.
  3. Calculer les images des extremums.
  4. Dresser le tableau de variations de f.

- ***Solution :***

1) Calcul des limites

f est une fonction polynôme. Elle a même limite que son terme du plus haut degré en l'infini.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

2) Calcul de f' et tableau de signes

f'(x) = 2x-3. f'(x) = 0 si $x = \frac{3}{2}$. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
2x+3		-	0	+	

3) Image du minimum

$f(\frac{3}{2}) = -\frac{5}{4}$

4) Tableau de variations

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f	$+\infty$	↘	-5/4	↗	$+\infty$

- Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = $-x^2 + 4x - 5$

1. Calculer les limites de f en -∞ et en +∞.
2. Calculer f' et dresser son tableau de signes.
3. Calculer les images des extremums.
4. Dresser le tableau de variations de f.

- ***Solution :***

1) Calcul des limites

f est une fonction polynôme. Elle a même limite que son terme du plus haut degré en l'infini.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$

2) Calcul de f' et tableau de signes

f'(x) = -2x + 4. f'(x) = 0 si x = 2

x	$-\infty$		2		$+\infty$
2x+4		**+**	0	**-**	

3) Image du maximum local

$$f(2) = -2 \times (2)^2 + 4(2) + 5 = 5$$

4) Tableau de variations

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'(x)		**+**	0	**-**	
f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

- (A faire en exercice) Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = $-x^3 + 6x^2 - 9x + 3$.

1. Calculer les limites de f en -∞ et en +∞.
2. Calculer f' et dresser son tableau de signes.
3. Calculer les images des extremums.
4. Dresser le tableau de variations de f.