Séquence 1 : Limites et continuités

1. Approche intuitive

1.1 Limite d'une fonction en l'infini

1.1.1 Limite infinie

- Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2$. Examinons le comportement de f lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes. Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5
x^2					

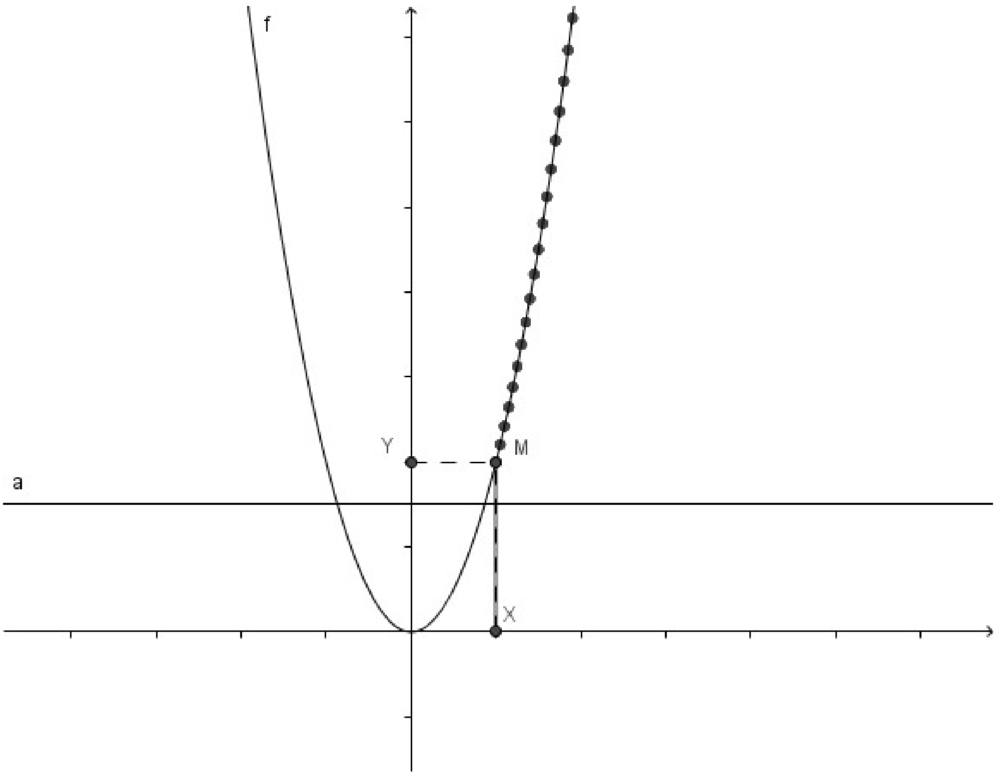
On constate que x² est un grand nombre positif pour des grandes valeurs de x.

On dit que **x² tend vers plus l'infini** quand x tend vers plus l'infini, et on écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Comment peut-on interpréter graphiquement ce résultat ?

Quel que soit le nombre a que l'on se donne, tous les points de la courbe de f sont situés au-dessus de la droite , y = a, pourvu que leurs abscisses soient assez grandes.



x se déplace vers la droite signifie x tend vers $+\infty$.
y= f(x) se déplace vers le haut veut dire f(x) tend vers $+\infty$.

Comme cette fonction est paire, on a f(-x) =f(x) ,alors $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

- Considérons la fonction f définie par f(x) = x^3. Examinons le comportement de f lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes. Compléter le tableau suivant :

x	10	10²	10^3	10^4	10^5
x^3					

On constate que x² est un grand nombre positif pour des grandes valeurs de x.

On dit que x² tend vers plus l'infini, quand x tend vers plus l'infini et on écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Comme cette fonction est impaire, on a f(-x) = - f(x) , alors $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

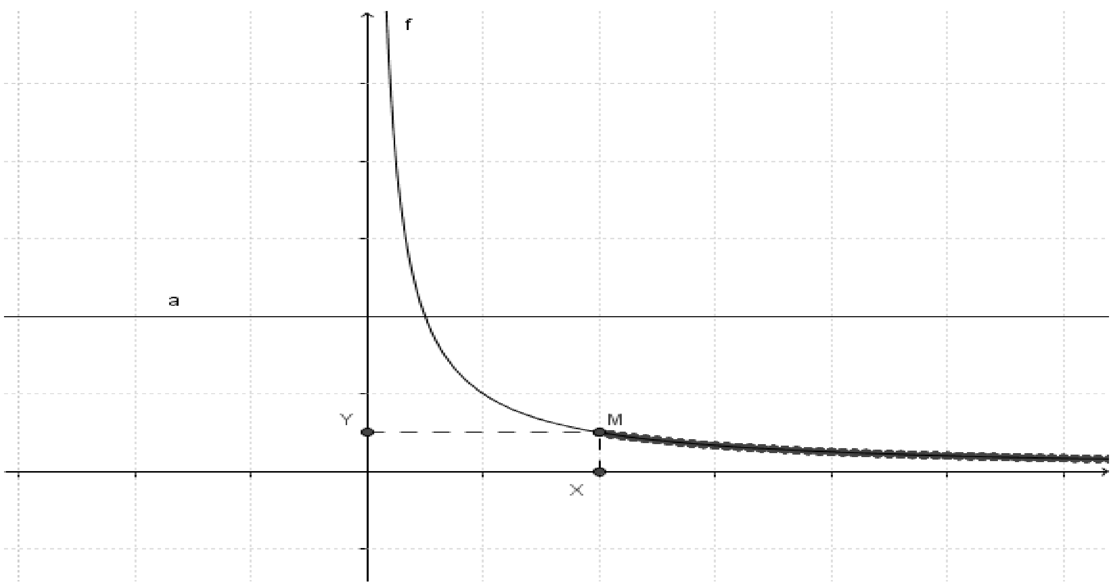
1.1.2 Limite finie

- Considérons la fonction définie par f(x) = 3. Même si x prend des valeurs des valeurs de plus en plus grandes, f(x) = 3. On dit que f(x) tend vers 3 si x tend vers l'infini et on écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} 3 = 3$$

- Considérons la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{x}$. Examinons le comportement de g(x) lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes. Compléter le tableau suivant :

x	10	10²	10^3	10^4	10^5
$\frac{1}{x}$					



On constate que $g(x)=\frac{1}{x}$ est très proche de 0 pour des grandes valeurs de x. On dit que $\mathbf{\frac{1}{x}}$ **tend vers 0** si x tend vers $+\infty$. On dit aussi que la limite en $+\infty$ de $\frac{1}{x}$ est 0. On écrit :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Comme la fonction g est impaire , on a $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

1.2 Limite d'une fonction en un nombre a

1.2.1 Limite finie

- Considérons la fonction définir par f(x) = x². Compléter le tableau suivant :

x	1,5	1,6	1,9	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,2
f(x)									

On constate que f(x) prend des valeurs de plus en plus proches de 4 lorsque x se rapproche de 2. On dit que **f(x) tend vers 4** lorsque x tend vers 2. On dit aussi que la limite en 2 de f est 4 et on écrit :

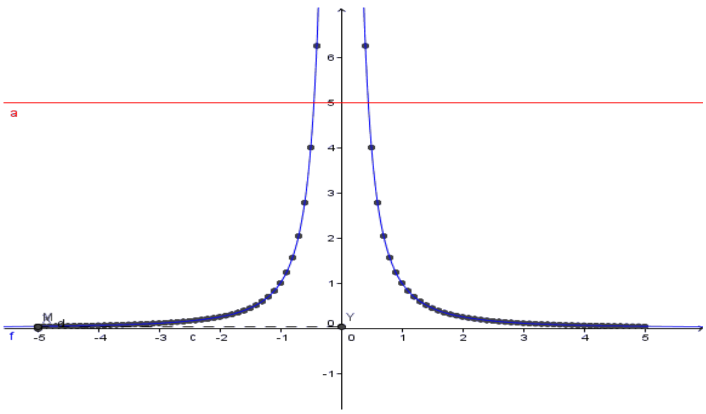
$$\lim_{x\to 2} f(x)=4$$

Dans le cas général, si f est définie en a, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Lorsque f admet une limite en a, cette limite est unique.

1.2.2 Limite infinie

Soit $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Examinons le comportement de f(x) lorsque x se rapproche de 0.



Compléter le tableau suivant :

x	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,00001	0	0,00001	0,0001	0,001	0,01
f(x)									

On constate que f(x) prend des valeurs positives de plus en plus grandes lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la **limite de f en 0 est** $+\infty$. On écrit $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

1.2.3 Limite à gauche, limite à droite

- Considérons la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x}$. On a $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. Examinons le comportement de f(x) lorsque $x\in]0;+\infty[$. Compléter le tableau suivant :

x	0	0,0001	0,001	0,01	0,1
f(x)					

On constate que $\frac{1}{x}$ prend les valeurs positives de plus en plus grandes lorsque x se rapproche de 0, tout en restant positif. On dit que $\boldsymbol{\frac{1}{x}}$ **tend vers** $\boldsymbol{+\infty}$ lorsque x tend vers 0 **par valeurs positives**.

On écrit : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}=+\infty$ ou encore $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}=+\infty$.

Comme cette fonction est impaire, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}=-\infty$.

Les deux limites sont différentes, f n'a pas de limite en 0.

f admet une **limite** en a si $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$

2. Limite des fonctions de références

Les fonctions suivantes sont appelées **fonctions de références :**

$f(x)=k$ $\quad$ $f(x)=x$ $\quad$ $f(x)=x^n$ $\quad$ $f(x)=\frac{1}{x^n}$ $\quad$ $f(x)=\sqrt{x}$

2.1 Limite en plus l'infini

$\lim_{x \to +\infty} k = k$ $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Exemples :

$\lim_{x \to +\infty} -3 = -3$ $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^{-3} = 0$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

2.2 Limite en 0

$\lim_{x \to 0} k = k$ $\lim_{x \to 0} x^n = 0$ $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ si n pair. Pour n impair, cette fonction n'a pas de limite en 0.

2.3 Limite en moins l'infini

$\lim_{x \to -\infty} k = k$ $\lim_{x \to -\infty} x^n = (-1)^n \infty$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Exemples :

$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\lim_{x \to -\infty} -\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

3. Limites et opérations sur les fonctions

La question qu'on se pose est la suivante : comment calcule-t-on la limite d'une chaîne de fonctions de référence reliées par des opérations ? Par exemple, $\lim_{x \to -\infty} x^2 + 2x + 1$ ou encore $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x}$?

Ces propriétés admises donnent les limites en a des fonctions $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ et $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Dans certains cas, on ne peut pas déduire directement. On les appelle les **formes indéterminées.**

3.1 Limite d'une somme

$\lim_{x \to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \to a} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to a} f(x)+g(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F I

Exemples :

- $\lim_{x \to +\infty} x^2+x+1 = \lim_{x \to +\infty} x^2 + \lim_{x \to +\infty} x + \lim_{x \to +\infty} 1 = +\infty + \infty + 1 = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^3+x^2 = \lim_{x \to -\infty} x^3 + \lim_{x \to -\infty} x^2$: on est dans le cas d'une forme indéterminée. Il faut faire des transformations pour trouver la limite. En mettant par exemple x^2 en facteur,

  $\lim_{x \to -\infty} x^3+x^2 = \lim_{x \to -\infty} x^2(x+1)$, on est dans le cas de f(x) g(x).

3.2 Limite d'un produit

$\lim_{x \to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	∞	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \to a} g(x)$	l'	$l'(l' \neq 0)$	$l'(l' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to a} f(x)g(x)$	ll'	+∞ x signe de l'	-∞ de x signe de l'	F I	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Exemples :

- $\lim_{x \to -\infty} x^3+x^2 = \lim_{x \to -\infty} x^2(x+1) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} x^2\sqrt{x} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

3.3 Limite d'un quotient

$\lim_{x \to a} f(x)$	l	∞	l	0	$l \neq 0$	∞
$\lim_{x \to a} g(x)$	$l' \neq 0$	∞	∞	0	0	0
$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	F I	0	F I	∞ étude de signe de $\frac{1}{g(x)}$	∞ étude de signe de g(x)

Exemples :

- $\lim_{x \to 1} (\frac{x^2+1}{x}) = \frac{1^2+1}{1} = 2$
- $\lim_{x \to +\infty} (\frac{1}{x}+x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 2^+} (\frac{x+1}{x^2-x-2}) = -\infty$

3.4 Les formes indéterminées

D'après ces tableaux, il y a quatre types de formes indéterminées :

$+\infty-\infty$; $0\times\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

4. Quelques méthodes pour lever l'indétermination

4.1 Limite d'une fonction polynôme en l'infini

Soit f une fonction polynôme. Si x tend vers l'infini, f a même limite que son terme du plus haut degré.

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+x^2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x+5=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

4.2 Limite d'une fonction rationnelle en l'infini

Soit f une fonction rationnelle. Si x tend vers l'infini, f a même limite que le rapport des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{x-3}+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}+1=1$

4.3 Le cas $\frac{0}{0}$

Ce cas se présente si a est à la fois racine du numérateur et du dénominateur. On peut alors mettre en facteur x-a en haut et en bas, puis simplifier et recalculer la limite de l'expression simplifiée.

Exemple :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1} x+3=4$$

5. Notion de continuité en un point

5.1 Définition

La fonction f est **continue en x_0** si la limite de f en x_0 est $f(x_0)$, c'est à dire $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemples :

- Toute fonction polynôme est continue en tout point x_0 de IR ;
- Toute fonction rationnelle est continue en tout point x_0 de son ensemble de définition.

5.2 Continuité à gauche, continuité à droite

La fonction f est continue à gauche en x_0 si la limite de f à gauche en x_0 est $f(x_0)$, c'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

La fonction f est continue à droite en x_0 si la limite de f à droite en x_0 est $f(x_0)$, c'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

La fonction f est continue en x_0 si elle est continue à gauche et à droite en x_0, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Exemple :

Soit f la fonction définie par f(x) = -x +3 si $x \leq 1$ et f(x) = x + 1si x > 1. f est-elle continue en 1 ?

Réponse:

- On calcule d'abord f(1), f(1) = -1+3 = 2.
- Calculons les limites à gauche et à droite en 1 :

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1+3 = 2$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1+1 = 2$: les deux limites sont égales à f(1) donc f est continue en 1.