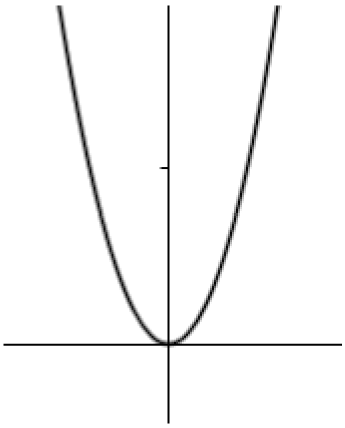
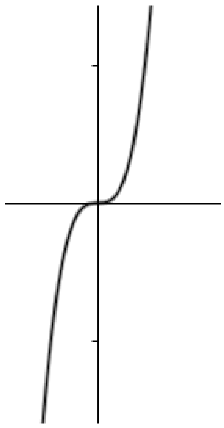
Séquence 2 : Généralités sur les fonctions numériques

1. Fonctions paire et impaire

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition. Soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

	f est une fonction **paire**	f est une fonction **impaire**
Définition	• D_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. • pour tout x élément de D_f, $f(-x) = f(x)$	• D_f est symétrique par rapport à 0. • pour tout x élément de D_f, $f(-x) = -f(x)$
Exemple	 $f(x) = x^2$	 $f(x) = x^3$
Interprétation graphique	L'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour (C).	L'origine du repère est un centre de symétrie pour (C).
Conséquence	On peut réduire le domaine d'étude à $D=D_f\cap\mathbb{R}^{+}$.	

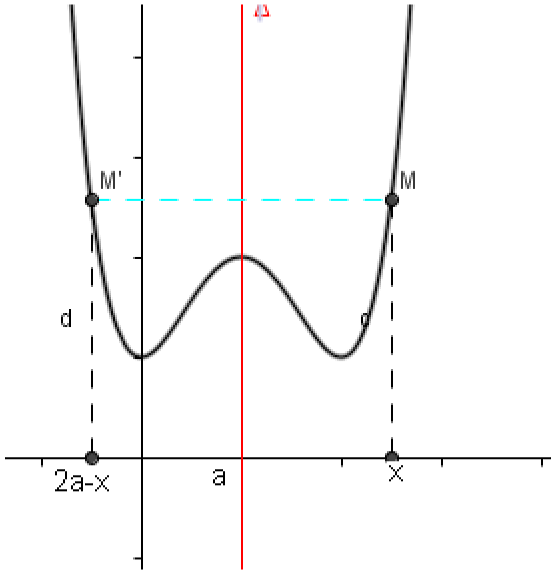
2. Éléments de symétrie

2.1 Axe de symétrie

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, soit f une fonction définie sur D_f, dont la courbe représentative est (C_f).

La droite Δ d'équation x = a est un **axe de symétrie** de (C_f) si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- Pour x élément de D_f , 2a - x est aussi un élément de D_f**.**
- $f(2a - x) = f(x)$

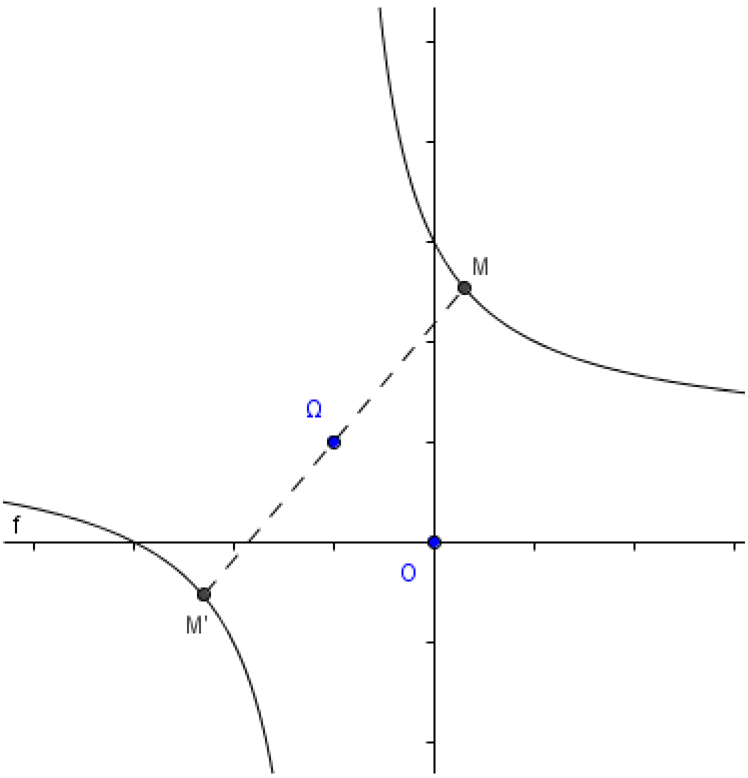


2.2 Centre de symétrie

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit f une fonction définie sur D_f, dont la courbe représentative est (C_f).

Le point $\Omega(a\,;b)$ est un **centre de symétrie** de (C_f) si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- Pour x élément de D_f , 2a - x est aussi un élément de D_f**.**
- f(2a - x) + f(x) = 2b



Soient M(x ; f(x)) , M'(2a-x) ; f(2a-x)) et Ω (a ; b). Alors Ω est le milieu du segment [MM'].

3. Fonctions périodiques

Une fonction f est **périodique** de période T si elle reste invariante quand x augmente de T. Il en résulte qu'elle reste invariante si on ajoute ou on retranche à x un multiple quelconque de T. Elle vérifie alors les propriétés suivantes :

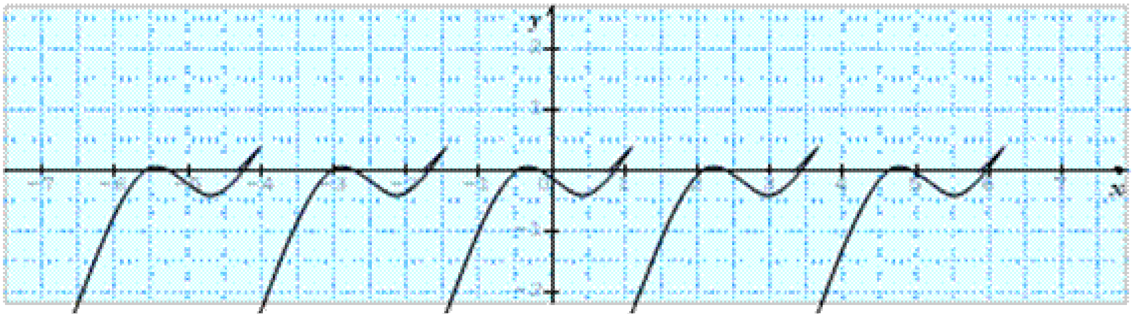
- Si x est un élément de D_f, alors (x+T) est un élément de D_f.
- f(x+T) = f(x).

Exemple :

f(x) = sin x est périodique de période 2π.

g(x) = tan x est périodique de période π.

Pour obtenir la représentation graphique d'une fonction périodique, il suffit de l'établir pour un intervalle d'amplitude T.



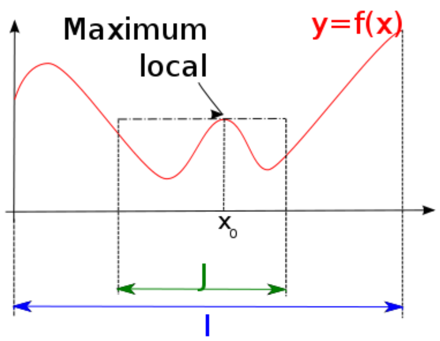
4. Extremum d'une fonction

4.1.1 Maximum local

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

$f(x_0)$ est un **maximum local** de I signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que :

Pour tout $x \in J \cap I,\ f(x) \leq f(x_0)$



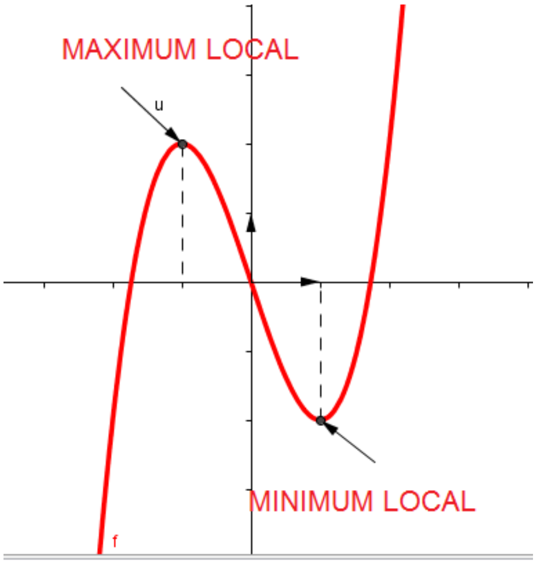
4.1.2 Minimum local

On a une définition similaire pour un minimum local.

$f(x_0)$ est un **minimum local** de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que : pour tout $x \in J \cap I,\ f(x) \geq f(x_0)$.

4.1.3 Exemple

1) La courbe suivante représente la fonction $f(x) = x^3 - 3x$, dans I = [-3 ; 3].



2) le tableau suivant est le tableau de variations d'une fonction f.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	

La fonction f présente un minimum local en $x_0 = -1$ et un maximum local en $x_1 = 1$.