Série 3 : Exercices sur les polynômes

Exercice 1 :

Mettre P(x) sous forme de (x-a).Q(x) où Q(x) est un polynôme que l'on déterminera.

a) $P(x)=x^2-7x+10$; $a=5$

b) $P(x)=3x^2-x-2$; $a=-\frac{2}{3}$

c) $P(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$; $a=-1$

Exercice 2 :

Résoudre dans R les équations suivantes :

a) $2x^2-5x=(2x-5)(x2+4)$

b) $4x^2-9=3(2x+3)^2$

c) $-x^2+4=3(x+3)(x+1)+(x+1)$

d) $(5x+3)^2=4(2x-3)^2$

e) $-\frac{5x}{3}(x-3)(x+1)=0$

f) $\frac{(x-3)^2-25}{x-8}=0$

g) $\frac{x^2+(2x-1)^2}{2x-1}=0$

h) $\frac{2}{x}=\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x(x+1)}$

Exercice 3 :

Étudier le signe des polynômes suivants :

a) $P_1(x)=4x^2-7x+1$

b) $P_2(x)=-4-2x+2x^2$

c) $P_3(x)=-13x^2-11x+10$

d) $P_4(x)=(x+1)^2-9$

e) $P_5(x)=(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$

f) $P_6(x)=(7x+4)(3x-9)(17x-2)(x^2-1)$

Exercice 4 :

On considère les trinômes $T_1(x)=5x^2-17x+1$, $T_2(x)=2x^2-7x-1$ et $T_3(x)=-4x^2+9x+1$.

1. Mettre $T_1(x)$, $T_2(x)$ et $T_3(x)$ sous forme canonique.
2. En déduire la factorisation de ces trois trinômes.
3. A partir de la forme factorisée, résoudre $T_1(x)=0$, $T_2(x)=0$ et $T_3(x)=0$.
4. En déduire l'ensemble de solutions pour $T_1(x)<0$, $T_2(x)\geq 0$ et $T_3(x)\leq 0$.
5. Donner et vérifier la somme et le produit des racines des trois équations $T_1(x)=0$, $T_2(x)=0$ et $T_3(x)=0$.
6. Résoudre $T_1(x)=0$, $T_2(x)=0$ et $T_3(x)=0$ en utilisant le discriminant.

Exercice 5 :

On considère la fonction polynôme f qui, au réel x, associe : $f(x)=(x^2-1)^2-6(x+1)^3+3(4x^2+11x+1)$.

1. Donner une forme réduite de f ainsi que son degré.
2. Calculer f(1). Que peut-on en conclure ?
3. Expliciter un polynôme g, de degré 3, tel que, pour tout x réel : f(x)=(x-1) g(x).
4. Calculer g(-2). Que peut-on en conclure ?
5. Expliciter un polynôme h, de degré 2, tel que, pour tout x réel : g(x)=(x+2) h(x).
6. Déterminer les racines réelles de h, puis factoriser f en un produit de quatre polynômes du premier degré.
7. Selon les valeurs du réel x, déterminer le signe de f(x).