Séquence 4 : Fonctions polynômes

1. Définition

Un **monôme** est une expression algébrique de la forme $a\,x^n$, où a est réel et n un entier naturel.

Un **polynôme** est une somme de monômes, c'est-à-dire une expression de la forme :

$P(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdot\ldots\ldots + a_1\,x + a_0$; n est un entier naturel et $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ des réels.

On peut écrire une fonction polynôme suivant les puissances croissantes ou les puissances décroissantes de x.

Le **degré** du polynôme est le plus grand entier naturel n tel que $a_n \neq 0$.

2. Factorisation d'un polynôme

2.1 Racine d'une fonction polynôme

Définitions :

- Le réel a est un zéro ou une **racine** de la fonction polynôme P(x) si P(a) = 0.
- 1 est une **racine évidente** d'une fonction polynôme f si, et seulement si, la somme des coefficients de f est nulle.
- 0 est une **racine évidente** d'une fonction polynôme f si, et seulement si, le coefficient constant de f est nul.
- \- 1 est une **racine évidente** d'une fonction polynôme si la somme des coefficients des termes de puissances impaires est égale à la somme des coefficients des termes de puissances paires.

Exemple :

Soit f définie par $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

- 2 est une racine de f car $f(2) = 2^3 - 2x2^2 - 2 + 2 = 0$
- 1 est racine de f car 1 - 2 - 1 + 2 = 0
- -1 est racine de f car 1 - 1 = - 2 + 2

3. Théorème (admis)

Soit P une fonction polynôme de degré n.
Le réel a est **racine** de P(x) si P(x) = (x–a) Q(x), où Q est un polynôme de degré n-1.

Pour trouver Q(x), on peut procéder par identification ou par division.

Exemples :

- Soit $P(x) = x^3 – 2x +1$

  1) Calculer P(1). Que peut-on en déduire ?

  2) Trouver deux réels a et b vérifiant $P(x) =(x-1) (x^2+ax+b)$.

1) P(1) = 0 donc 1 est racine de P(x).

2) Méthode par identification :

En développant la deuxième expression de P(cx), on a :

$P(x) = x^3 + ax^2 +bx - x^2 - ax - b = x^3 + (a-1) x^2 +(b-a)x - b$

Par identification, on a $\begin{cases} a-1=0 \\ b-a=-2 \\ -b=1 \end{cases}$ donc on a a = 1 et b = -1.

Ainsi, $P(x) = (x-1)(x^2+x-1)$.

- Soit $f(x) = x^3-2x^2-x+2$.

  1) Calculer f(1). Que peut-on en déduire ?

  2) Trouver le trinôme T(x) vérifiant f(x)=(x-1)T(x).

1) Comme -2 - 1 + 2 = 0, f(1) = 0 donc 1 est racine de f(x).

2) Méthode de la division

$$\begin{array}{r|l}
x^3-2x^2-x+2 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - x^2} & x^2 - x - 2 \\
-x^2-x+2 & \\
\underline{-x^2+x} & \\
-2x+2 & \\
\underline{-2x+2} & \\
0 &
\end{array}$$

Donc : $f(x) = (x-1) (x^2-x-2)$.

Remarque :

Cette méthode permet de calculer les racines d’un polynôme de degré 3 ou 4.