Séquence 1 : Symétries et translation

1. Généralités

Une **transformation** f du plan associe à tout point M un point M', appelé image de M par f, telle que tout point B est l'image d'un point unique A.

L'image M' de M par f est notée f(M). Notation : f : $M \longmapsto M' = f(M)$

La définition signifie donc que pour tout point B, il existe un et un seul A tel que f(A) = B.

Un point M est un **point invariant** (ou **point fixe**) par une transformation f s'il est sa propre image :

$$f(M) = M$$

L'**identité du plan**, notée Id ou I, est la transformation telle que tout point est sa propre image.
Donc quel que soit le point M : Id(M) = M.

L'**image d'une figure** *F* par une transformation f, notée f(*F*), est l'ensemble des images des éléments de F : $f(F)=\{f(M)/M\in F\}$

Une figure F est **globalement invariante** par la transformation f si f(F) = F.

Soient f et g deux transformations du plan.
La **composée de f et de g** est la transformation notée g o f, définie pour tout point M par :
g o f(M) = g[f(M)] : l'image de M par g o f est donc l'image de f(M) par g.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\,o\,f"'] & f(M) = M' \arrow[r, "g"] & g(M') = M'' = gof(M) \end{tikzcd}$$

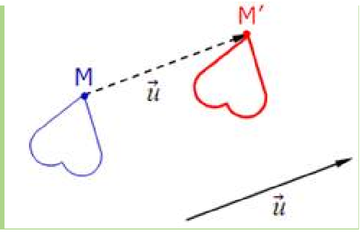
En général, $gof \neq fog$.

2. Translations

2.1 Définitions

Soit $\vec{u}$ un vecteur.
La **translation** de vecteur $\vec{u}$ est la transformation $t_{\vec{u}}$ qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$$

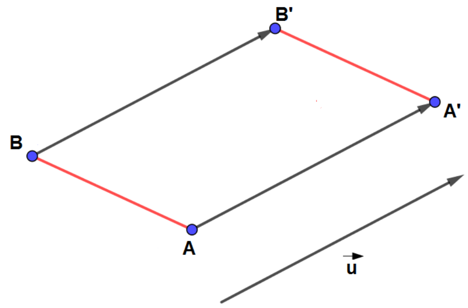


On note $M' = t_{\vec{u}}(M)$.

2.2 Propriétés

$M'=M=t_{\vec{u}}(M)$ si et seulement si $\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$ donc si et seulement si $\vec{u}=\vec{0}$.

Si $A' = t_{\vec{u}}(A)$ et $B' = t_{\vec{u}}(B)$, alors $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$ et par suite, AA'B'B est un parallélogramme.



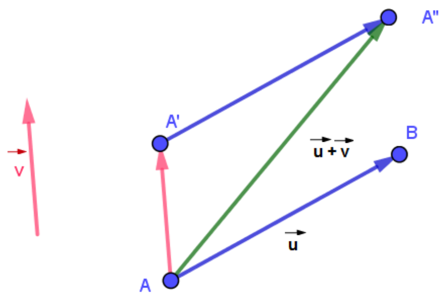
De plus, on a A'B' = AB : on dit que toute **translation conserve la distance**.

2.3 Composée de deux translations

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs et $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ sont les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors :

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$$

Plus précisément, $A'' = t_{\vec{u}+\vec{v}}(A) = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}(A)$ si et seulement si $\overrightarrow{AA''}=\vec{u}+\vec{v}$.



3. Symétrie centrale

3.1 Définition

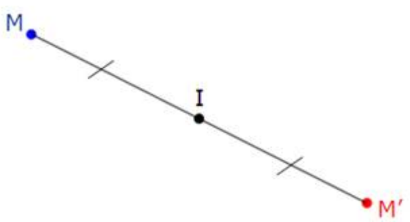
Soit I un point donné.

Une **symétrie** S_I de centre I est une transformation qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{MI}$$

Notation : M'= S_I(M).

On dit que M' est le symétrique de M par rapport à I.



3.2 Propriétés

- Si $M \neq I$ et $M' = S_I(M)$, alors I est le milieu du segment [MM'] ;
- I est l'unique point invariant pour S_I, c'est-à-dire $S_I(I) = I$;
- Si $M' = S_I(M)$, alors $M = S_I(M')$.

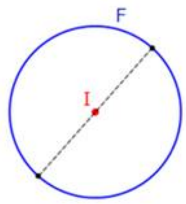
Soient $A' = S_I(A)$ et $B' = S_I(B)$.

Alors $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$, et par suite, AB'A'B est un parallélogramme.

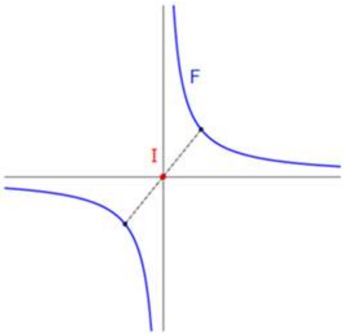
De plus, AB = A'B' : toute symétrie conserve la distance.

Une figure F possède un centre de symétrie I si et seulement F est globalement invariante par S_I, c'est-à-dire $S_I(F) = F$.

Exemples :



CERCLE

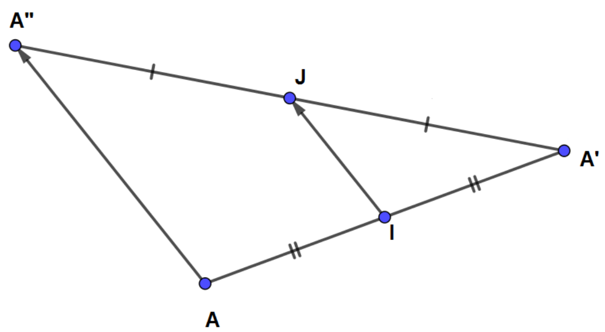


HYPERBOLE

3.3 Composée de deux symétries centrales

La composée de deux symétries centrales S_I et S_J, de centres respectifs I et J, est la translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$: $S_J \circ S_I = t_{2\overrightarrow{IJ}}$.

Soit $M' = S_I(M)$ et $M'' = S_J(M')$. Alors $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{IJ}$.



4. Symétrie orthogonale

4.1 Définition

Soit Δ une droite.
Une **symétrie orthogonale** (ou **réflexion**) d'axe Δ, notée S_Δ , associe à tout point M du plan, le point M' tel que :

- Si $M \in \Delta$, alors M' = M.
- Si $M \notin \Delta$, alors Δ est la médiatrice de [MM'].

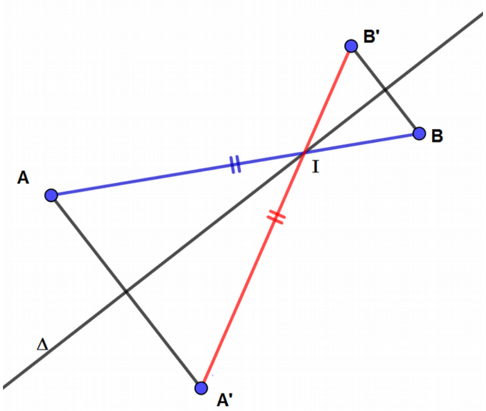
Notation : M' =(M).

On dit que M' est le symétrique de M par rapport à Δ, ou que M et M' sont symétriques par rapport à Δ.

4.2 Propriétés

- Si $M' = S_\Delta(M)$, alors $M = S_\Delta(M')$.
- Un point M est invariant par Δ si et seulement si $M \in \Delta$
- L'axe de symétrie est l'ensemble des points invariants.

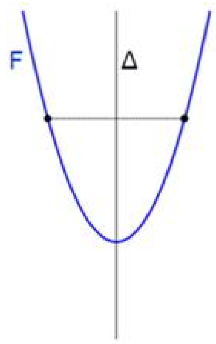
- Si $M' = S_\Delta(M)$ et $N' = S_\Delta(N)$ alors les droites (MN) et (M'N') sont symétriques par rapport à Δ.
- Si (MN) n'est pas parallèle à Δ, alors les droites (MN), (M'N') et Δ sont concourantes en un point I (qui est invariant par S_Δ).
- M'N' = MN : toute symétrie orthogonale conserve la distance.



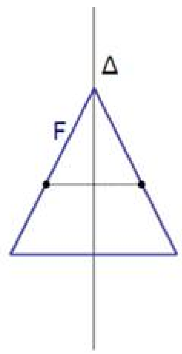
- Une figure F possède un axe de symétrie Δ si F est globalement invariante par S_Δ :

c'est-à-dire $S_\Delta(F) = F$

Exemple :



Parabole

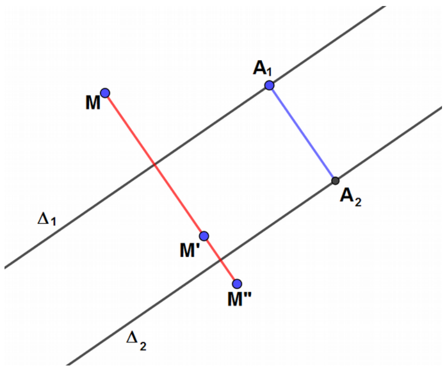


Triangle isocèle

•

4.3 Composée de deux symétries orthogonales

Les deux axes sont parallèles :

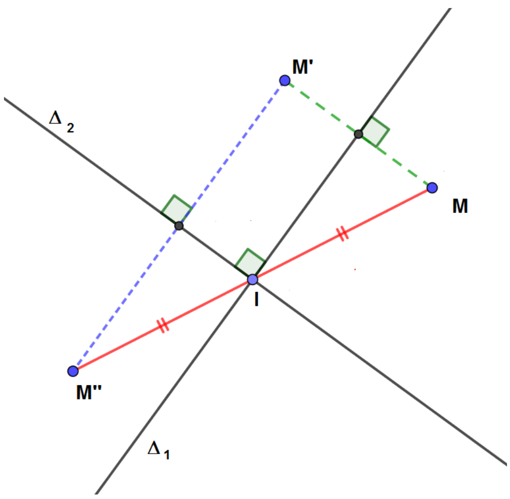


Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites parallèles, S_{Δ_1} et S_{Δ_2} les symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ_1) et (Δ_2), A_1 un point quelconque de (Δ_1) et A_2 le projeté orthogonal de A_1 sur (Δ_2).

Alors $S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1} = t_{2\overrightarrow{A_1A_2}}$

Donc si $M' = S_{\Delta_1}(M)$ et $M'' = S_{\Delta_2}(M')$, alors $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$.

Les deux axes sont perpendiculaires :



Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites perpendiculaires, S_{Δ_1} et S_{Δ_2} les symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ_1) et (Δ_2),et I le point d'intersection des deux droites.

Alors la composée des deux symétries est une symétrie centrale de centre I :

$$S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1} = S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta_2} = S_I$$