Séquence 2 : Produit scalaire

1. Expression du produit scalaire

1.1 Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Dans une base $(\vec{i},\vec{j})$, si $\vec{u}=a.\vec{i}+b.\vec{j}$, on appelle **norme du vecteur** $\vec{u}$ le nombre réel noté $\|\vec{u}\|$ défini par $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}$. Géométriquement, cela représente la longueur du vecteur.

1.2 Cas de deux vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires.

On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini ainsi :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|$;
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires, alors $\vec{u}.\vec{v}=-\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|$.

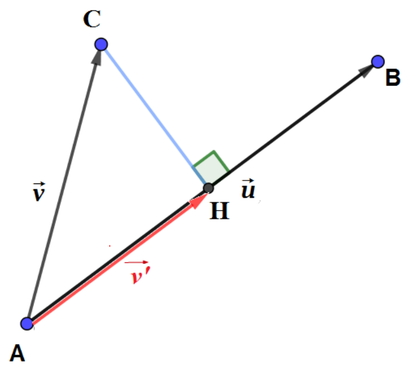
1.3 Cas général

Soient $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires.

Soit $\vec{v}'=\overrightarrow{AH}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

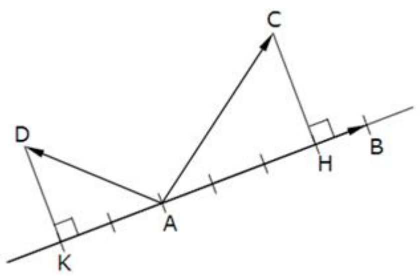
On pose par définition :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}'$ ou encore $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AB.AH$



1.4 Exemples

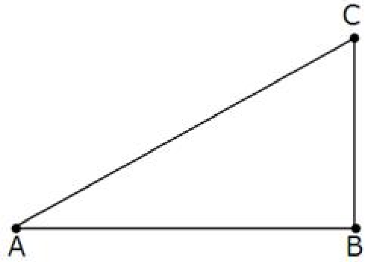
1.



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AB.AH=4\,x\,3=12$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK}=-AB.AK=-4\,x\,2=-8$

2. Soit ABC un triangle direct rectangle en B. On a :



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB^2$ puisque C se projette orthogonalement en B sur (AB).

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\vec{0}=0$ puisque le projeté orthogonal de $\overrightarrow{BC}$ sur $\overrightarrow{AB}$ est $\vec{0}$

De façon plus général, le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.

1.5 Autres expressions

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$;
- $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

2. Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k un nombre réel.

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$;
- $\vec{u}.(k.\vec{v})=k.(\vec{u}.\vec{v})$;
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$;
- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$;
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$;
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

3. Base orthonormée

Une **base orthonormée** est constituée par deux vecteurs unitaires orthogonaux.

Dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$, si $\vec{u}=a.\vec{i}+b.\vec{j}$ et $\vec{v}=a'.\vec{i}+b'.\vec{j}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=aa'+bb'$.

Dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$, si $\vec{u}=a.\vec{i}+b.\vec{j}$ alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}$.