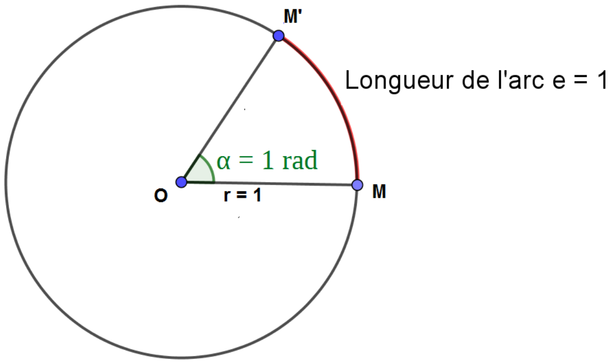
Séquence 1 : Cercle trigonométrique – Angles orientés

1. Unités de mesure d'angle

Outre le **degré**, on utilise comme unité de mesure pour les angles le **radian** et le **grade**.
Un radian est la mesure d'un angle au centre qui intercepte un arc de longueur égale au rayon de ce cercle.



Ainsi, l'angle plat a pour mesure en degré 180 (180°), en radian π, (π rad) et en grade 200 (200 gon).

Par exemple, si le cercle a pour rayon 1 centimètre et si $\text{mes}(\widehat{AOB})=\frac{\pi}{5}$ radians alors l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ mesure $\frac{\pi}{5}$ centimètres.

Pour un angle donné, si α est sa mesure en degré, b sa mesure en radian et e sa mesure en grade,

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{b}{\pi} = \frac{e}{200} \ .$$

1.1 Mesure en radians des angles usuels

Mesure en degré	0	30	45	60	90	180	360
Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

1.2 Longueur d'un arc de cercle

La circonférence d'un cercle de rayon r et de centre O est c = 2.π.r, la longueur d'un demi-cercle de centre O et de rayon r est donc π.r.

Plus généralement, si A et si B sont deux points d'un cercle de centre O et de rayon r, et si α est la mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$, alors la longueur l de l'arc est l = r α.

2. Trigonométrie dans le triangle rectangle

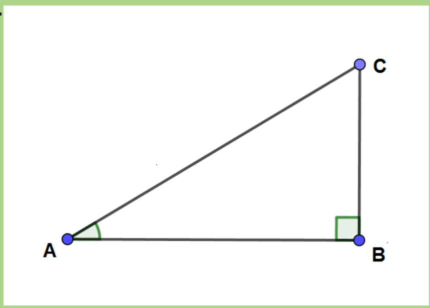
2.1 Définitions

Soit ABC un triangle rectangle en B, notons par $\hat{A}$ l'angle $\widehat{BAC}$.
On a :

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$



Dans un triangle rectangle, si on connaît la mesure d'un angle et la mesure d'un côté, on peut connaître les mesures de tous les côtés et les angles.

Exemple :

Soit ABC un triangle rectangle en B, α la mesure en degré de l'angle $\hat{A}$, a = BC, b = AC, et c = AB.

On donne α = 50° et b = 12. Calculer a et c.

Réponse :

Nous savons que $\sin \alpha = \frac{a}{b}$, donc a = b sin α, c'est-à-dire a = 12 x 0,766 = 9,19 donc a = 9,19.

De même $\cos \alpha = \frac{c}{b}$ donc c = b cos α, c'est-à-dire c = 12 x 0,628 = 7,54 donc c = 7,54.

2.2 Propriétés

- $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$;
- $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$

3. Orientation du plan

3.1 Orientation d'un cercle – Orientation d'un plan

Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle.

Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens : on convient de choisir comme sens positif (ou sens direct) le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

3.2 Cercle trigonométrique

Une unité de longueur étant choisie, on appelle **cercle trigonométrique** un cercle centré en un point O et orienté dans le sens direct. On lui associe un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ où A est un point quelconque du cercle.

On prend A comme origine pour la mesure des arcs et la demi droite [OA) comme origine pour la mesure des angles.

3.3 Angles orientés de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, et M et N deux points tels que $\overrightarrow{ON} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$.

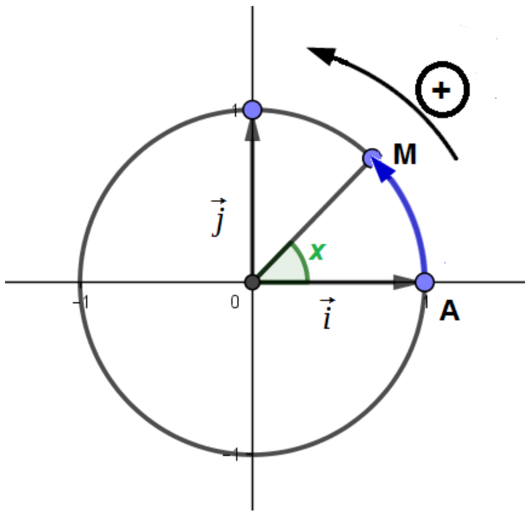
La mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$.

4. Mesures d'un angle orienté

4.1 Théorème

Dans un plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$, soit A le point tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ et M un point quelconque du cercle trigonométrique.

Si x est la mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ alors les nombres x +2 k π, où $k \in \mathbb{Z}$ sont aussi des mesures de cet angle.



En effet :

Lorsqu'on fait tourner le point M d'un tour supplémentaire, il se trouve sur sa position initiale du cercle trigonométrique et on obtient :

- x+ 2π s'il tourne dans le sens positif ;
- x- 2π s'il tourne dans le sens négatif.

Plus généralement, s'il effectue k tours supplémentaires dans un sens ou dans l'autre, il se retrouve sur le même point du cercle trigonométrique et on obtient :

- $x + 2k\pi$ s'il tourne dans le sens positif ;
- $x - 2k\pi$ s'il tourne dans le sens négatif.

Par conséquent, on peut résumer les deux situations en posant $k \in \mathbb{Z}$.

4.2 Définition

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels qu'une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à x rad. Alors chacun des nombres associés à x de la forme $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, s'appelle une mesure de l'angle orienté de $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exemple :

Si $x = \frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$, alors $\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$ est aussi une mesure de cet angle.

De même, $\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$ est aussi une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

4.3 Mesure principale d'un angle orienté

Théorème – Définition :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels qu'une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à x rad. Alors parmi les valeurs associées à x de la forme $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, il existe une et une seule qui appartient à l'intervalle] -π ; π].

Cette mesure s'appelle la **mesure principale de l'angle orienté** de $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exemple :

a) Déterminons la mesure principale de $x = \frac{272\pi}{12}$.

Soit α la mesure principale de x. Alors il existe un entier relatif k tel que $\frac{273\pi}{12} = \alpha + 2k\pi$

et avec $-\pi < \alpha \leqslant \pi$.

Effectuons la division euclidienne de 273 par 12 : on obtient 273 = 12 x 22 + 9.

Donc $\frac{273\pi}{12} = \frac{(12 x 22 + 9)\pi}{12}$

Par suite $\frac{273\pi}{12} = 22\pi + \frac{9\pi}{12}$

Et après simplification, $\frac{273\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}+11\,x\,2\pi$ et $-\pi<\frac{3\pi}{4}\leq\pi$.

En conclusion, la mesure principale de $\frac{272\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

b) Déterminons la mesure principale de l'angle $\frac{64}{3}$.

Soit α la mesure principale de cet angle. Alors il existe un entier relatif k tel que $\frac{64\pi}{3}=\alpha+2k\pi$ et $-\pi<\alpha\leqslant\pi$.

Effectuons la division euclidienne de 64 par 3 : on obtient 64 = 21x3 + 1.

Donc $\frac{64\pi}{3}=\frac{(21\,x\,3+1)\pi}{3}$

Par suite $\frac{64\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+21\pi$

On obtient, cette fois, un multiple impair de π. On pose alors : 21 π = 22π - π.

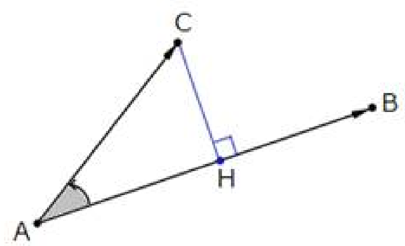
Donc $\frac{64\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\ -\pi+11\,x\,2\pi$

La mesure principale de l'angle $\frac{64}{3}$ est $\frac{\pi}{3}\ -\pi=\frac{-2\pi}{3}$.

4.4 Cosinus d'un angle orienté de deux vecteurs

Dans le plan orienté, soient A, B et C trois points non alignés.

Alors $\cos[\widehat{(\vec{AC},\vec{AB})}]=\frac{\overline{AB}.\overline{AH}}{AB.AC}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).



En effet, on sait que $\vec{AB}.\vec{AC}=\overline{AB}.\overline{AH}$ et que

$\vec{AB}.\vec{AC}=AB.AC.\cos(\widehat{\vec{AB}.\vec{AC}})$ [1].

On en déduit que $\cos(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}})=\frac{\overline{AB}.\overline{AH}}{AB.AC}$.

[1] : Voir Géométrie – Vecteur du plan - Produit Scalaire, §.1.2 et §.1.4