Fiche méthode 2 : Suites homographiques

1. Méthode pour v_n géométrique

- On donne une suite (u_n) du type $u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}$ qui n'est ni arithmétique ni géométrique.
- On introduit ensuite une deuxième suite (v_n) tel que $v_n = f(u_n)$.
- Pour démontrer que (v_n) est une suite géométrique :
  - Exprimer d'abord v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis de u_n ;
  - Puis calculer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Ce rapport doit être égal à une constante ; c'est la raison q de (v_n).

  Rappel : le terme général d'une suite géométrique est $v_n=v_0\times q^n$.
- Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n :
  - Exprimer d'abord u_n en fonction de v_n ;
  - Puis remplacer v_n par son expression

2. Exemple d'exercices

2.1 Énoncé classique

Soit la suite (u_n) définie sur IN* par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n-1}{2u_n+5} \quad \text{pour tout } n\geq 0 \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit (v_n) la suite définie sur IN par $v_n=\dfrac{2u_n+1}{u_n+1}$

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

   b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

2.2 Solution

1. Calcul des termes u_1, u_2 et u_3.

On a $u_1=\frac{2u_0-1}{2\times+5}=\frac{2\times1-1}{2\times1+5}=\frac{1}{7}$, $u_2=\frac{2u_1-1}{2u_1+5}=-\frac{5}{37}$ et $u_3=\frac{2u_2-1}{2u_2+5}=-\frac{47}{175}$.

On constate que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. Étude de (v_n).

- On a $v_{n+1}=\frac{2u_{n+1}+1}{u_{n+1}+1}=\frac{2(\frac{2u_{n+1}-1}{2u_{n+1}+5})+1}{(\frac{2u_{n+1}-1}{2u_{n+1}+5})+1}$. Après simplification, on obtient $v_{n+1}=\frac{3(2u_{n+1}+1)}{4(u_{n+1}+1)}$

- Le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{3}{4}$ permet de conclure que (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0=\frac{2u_0+1}{u_0+1}=\frac{3}{2}$.

- Expression de v_n en fonction de n : on a $v_n=\frac{3}{2}\times(\frac{3}{4})^n$

- Expression de u_n en fonction de n : on a $v_n=\frac{2u_n+1}{u_n+1}$, ce qui implique $v_n(u_n+1)=2u_n+1$ et $u_n=\frac{1-v_n}{-2+v_n}$. En remplaçant v_n par son expression, on obtient : $u_n=\frac{1-\frac{3}{2}\times(\frac{3}{4})^n}{-2+\frac{3}{2}\times(\frac{3}{4})^n}$.

3. Méthode pour v_n arithmétique

- On donne une suite (u_n) du type $u_{n+1}=\frac{au_n+b}{cu_n+d}$ qui n'est ni arithmétique ni géométrique.
- On introduit ensuite une deuxième suite (v_n) tel que v_n = f (u_n).
- Pour démontrer que (v_n) est une suite arithmétique :

  - Exprimer d'abord v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis de u_n ;
  - Puis calculer $v_{n+1}-v_n$. Ce rapport doit être égal à une constante ; c'est la raison r de (v_n).

  Rappel : le terme général d'une suite géométrique est $v_n=v_0+r\times n$.
- Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n :

  - Exprimer d'abord u_n en fonction de v_n ;
  - Puis remplacer v_n par son expression

4. Exemple d'exercices

4.1 Énoncé classique

On définit la suite (u_n) définie sur IN par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\frac{5u_n-3}{3u_n-1} \text{ pour tout } n\geq 0 \end{cases}$.

1. Soit (v_n) la suite définie sur IN par $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-1}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

4.2 Solution

1. Montrons que (v_n) est une suite arithmétique.

- On a $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-1}=\frac{(\frac{5u_{n+1}-3}{3u_{n+1}-1})+1}{(\frac{5u_{n+1}-3}{3u_{n+1}-1})-1}$. Après simplification, on obtient $v_{n+1}=\frac{4u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1}$

- On a alors $v_{n+1}-v_n=\frac{4u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1}-\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-1}=3$. Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=\frac{u_0+1}{u_0-1}=-1$.

2. Expression de v_n puis u_n en fonction de n :

- L'expression de v_n en fonction de n est $v_n=-1+3n=3n-1$

- On a $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-1}$, ce qui implique $v_n(u_n-1)=u_n+1$ et $u_n=\frac{v_n+1}{v_n-1}$. En remplaçant v_n par son expression, on obtient : $u_n=\frac{3n}{3n-2}$.