Fiche méthode : Variations d'une suite numérique

1ère Méthode

Soit (u_n) une suite numérique. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ quel que soit n, alors (u_n) est croissante ;
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ quel que soit n, alors (u_n) est décroissante ;
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$ quel que soit n, alors (u_n) est constante.

Exemple d'exercice :

Soit la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n = \frac{1}{2^n} - n$.

Calculez $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe. En déduire les variations de (u_n).

Solution

Calcul de $u_{n+1} - u_n$: $u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} - n - 1$ donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} - 1$.

En réduisant au même dénominateur, on a $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2^{n+1}} - 1 < 0$ quel que soit n.

Donc (u_n) est décroissante.

2ème Méthode pour les suites à termes positifs (u_n>0)

On compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ quel que soit n, alors (u_n) est croissante ;
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ quel que soit n, alors (u_n) est décroissante ;
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ quel que soit n, alors (u_n) est constante.

Exemple d’exercice :

Soit la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n = \frac{3^n}{2^{n-1}}$.

Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n. En déduire les variations de (u_n).

Solution

$u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^n}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{2^n}}{\frac{3^n}{2^{n-1}}} = \frac{3}{2} > 1$ donc (u_n)est croissante.

3ème Méthode pour les suites de type $u_n = f(n)$

On étudie les variations de la fonction $f : [0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

- Si f est croissante, alors (u_n) est croissante ;
- S f est décroissante, alors (u_n) est décroissante ;
- Si f est constante, alors (u_n) est constante.

Exemple d’exercice :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n^2+5n+2}{n+1}$. Étudier les variations de la suite (u_n).

Solution

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞ [par $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x+1}$.

f est une fonction rationnelle , donc dérivable et $f'(x) = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$

On a f’(x) > 0 pour tout x positif, donc f est croissante, ainsi (u_n) est aussi croissante.